

①

Soluzione di (alcuni) esercizi
proposti sulla Trasformata di Fourier

Si calcoli la Trasformata di Fourier
dei seguenti segnali ricorrendo quando più
possibile a proprietà della trasformata.

1)

$$[e^{-\alpha t} \cdot \cos 2\pi f_0 t] u(t) \quad \text{con } \alpha > 0$$

Si può applicare il teorema della
modulazione, nota la trasformata (notevole o
comunque facilmente calcolabile):

$$\begin{array}{ccc} e^{-\alpha t} u(t) & \xleftrightarrow{f} & \frac{1}{\alpha + j 2\pi f} \quad \alpha > 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ x(t) & & X(f) \end{array}$$

Il segnale dato è $x(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t$
che ha T-rasformata: $\frac{1}{2} [X(f-f_0) + X(f+f_0)]$ -
Quindi, infine:

$$\begin{array}{ccc} [e^{-\alpha t} \cos 2\pi f_0 t] u(t) & \xleftrightarrow{f} & \dots \\ \dots & \xleftrightarrow{f} & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha + j 2\pi (f-f_0)} + \frac{1}{\alpha + j 2\pi (f+f_0)} \right] \\ & & \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ & & X(f-f_0) \quad \quad X(f+f_0) \end{array}$$

$$2) \quad e^{-3|t|} \cdot \sin 2\pi t$$

Si può applicare il teorema della modulazione (versione "seno") nota la trasformata di $e^{-3|t|}$

Si osserva che:

$$e^{-3|t|} = e^{-3t} u(t) + e^{3t} u(-t)$$

$\nwarrow x(t)$
 $\updownarrow$
 $X(f)$

$\nwarrow x(-t)$
 $\updownarrow$
 $X(-f)$

Essendo:

$$X(f) = \mathcal{F} \{ e^{-3t} u(t) \} = \frac{1}{3 + j2\pi f}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ e^{-3|t|} \} &= X(f) + X(-f) = \frac{1}{3 + j2\pi f} + \frac{1}{3 + j2\pi(-f)} = \\ &= \frac{6}{9 + (2\pi f)^2} \end{aligned}$$

Applicando quindi il teorema della modulazione

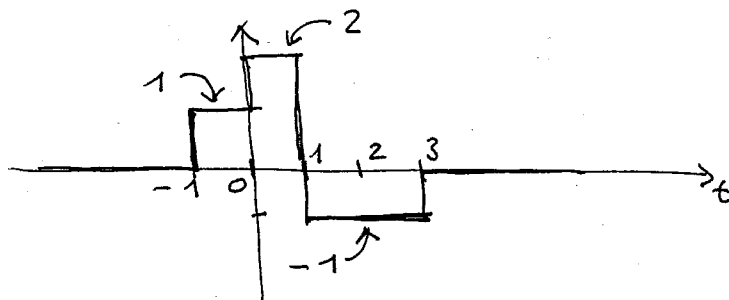
$$\boxed{e^{-3|t|} \sin 2\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dots$$

$$\dots \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2j} \left[\frac{6}{9 + [2\pi(f - \frac{1}{4})]^2} - \frac{6}{9 + [2\pi(f + \frac{1}{4})]^2} \right]$$

$f_0 = \frac{1}{4}$ $\nearrow$

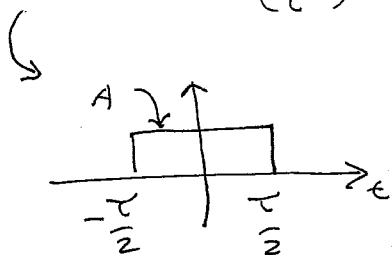
(3)

3) $x(t)$ sia come in figura:



È noto che:

$$A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} A\tau \cdot \text{sinc} f\tau$$



Il segnale dato si può scrivere come:

$$x(t) = \text{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

Quindi da quanto sopra e dal teorema di Traslazione nel tempo e da quello del cambiamento di scala:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \text{sinc}(f) e^{j2\pi f \cdot \frac{1}{2}} + 2 \cdot \text{sinc}(f) e^{-j2\pi f \cdot \frac{1}{2}} - 2 \cdot \text{sinc}(2f) e^{-j2\pi f \cdot 2}$$

(4)

$$4) \quad [t \cdot e^{-2t} \overset{f_0}{\text{sen } 2\pi \cdot 4t}] \cdot u(t)$$

Anche qui: teorema della modulazione versione "seno" a partire dalla trasformata di:
 $t \cdot e^{-2t} \cdot u(t)$ che può essere calcolata p.es.
 dalla definizione ricordando il metodo di
 integrazione per parti (qui sotto: α generico):

$$\mathcal{F}\{t e^{-\alpha t} u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\alpha t} u(t) e^{-j 2\pi f t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \quad \text{avendo posto } s = \alpha + j 2\pi f.$$

$$\int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[\frac{t e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$\overset{\text{se } \alpha > 0}{=} \left[\frac{0 - 0}{-s} \right] - \left[\frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{s^2} [0 - 1] = \frac{1}{s^2} = \frac{1}{(\alpha + j 2\pi f)^2}$$

Quindi dal teorema della modulazione (con
 $f_0 = 4$ e $\alpha = 2$):

$$t e^{-2t} \text{sen}(2\pi \cdot 4t) \cdot u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dots$$

$$\dots \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{[2 + j 2\pi(f - 4)]^2} - \frac{1}{[2 + j 2\pi(f + 4)]^2} \right]$$

$\swarrow \alpha$ $\swarrow f_0$

(6)

5)

$$x(t) = e^{2+t} u(-t+1)$$

Si può esprimere questo segnale come il segnale (con trasformata nota): $e^{-t} u(t)$ a cui sono stati applicati cambiamenti di segno o di scala, traslazioni ecc.

Infatti:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2+t} u(-t+1) = e^3 \left[e^{-1+t} u(-t+1) \right] = \\ &= e^3 \left[e^{-(-t+1)} u(-t+1) \right] = x_1(-t) \end{aligned}$$

essendo:

$$x_1(t) = e^3 \left[e^{-(t+1)} u(t+1) \right] = x_2(t+1)$$

essendo:

$$x_2(t) = e^3 \left[e^{-t} u(t) \right] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{e^3}{1+j2\pi f} = X_2(f)$$

e quindi a ritroso:

$$X_1(f) = X_2(f) e^{j2\pi f} =$$

$$\frac{e^{(3+j2\pi f)}}{1+j2\pi f}$$

e infine:

$$\boxed{X(f) = X_1(-f) = \frac{e^{3-j2\pi f}}{1-j2\pi f}}$$

6)

6

$$x(t) = e^{-3t} [u(t+2) - u(t-3)]$$

Con approccio simile al precedente si osserva che si può scrivere:

$$x(t) = x_1(t+2) - x_2(t-3)$$

essendo:

$$x_1(t) = e^6 \cdot e^{-3t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{e^6}{3 + j2\pi f} = X_1(f)$$

$$x_2(t) = e^{-9} e^{-3t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{e^{-9}}{3 + j2\pi f} = X_2(f)$$

In fatti:

$$\begin{aligned} x_1(t+2) - x_2(t-3) &= e^6 \cdot e^{-3(t+2)} u(t+2) + \\ &- e^{-9} \cdot e^{-3(t-3)} u(t-3) = e^{6-3t-6} u(t+2) + \\ &- e^{-9-3t+9} u(t-3) = e^{-3t} u(t+2) - e^{-3t} u(t-3) = \\ &= e^{-3t} [u(t+2) - u(t-3)] \end{aligned}$$

E quindi:

$$\begin{aligned} X(f) &= X_1(f) e^{j2\pi f \cdot 2} - X_2(f) e^{-j2\pi f \cdot 3} = \\ &= \frac{e^{(6+j4\pi f)} - e^{-(9+j6\pi f)}}{3 + j2\pi f} \end{aligned}$$

(7)

7)

$$x(t) = \sin 2\pi t + \cos [(2\pi)^2 t + \pi/4]$$

È una somma di seni e coseni e quindi:
somma delle rispettive trasformate -

Si osservi che in generale è:

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \left[e^{j2\pi f_0 t + j\varphi} + e^{-j2\pi f_0 t - j\varphi} \right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) e^{j\varphi} + \delta(f + f_0) e^{-j\varphi}]$$

Quindi:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2j} [\delta(f - 1) - \delta(f + 1)] +$$

$$+ \frac{1}{2} [\delta(f - 2\pi) e^{j\pi/4} + \delta(f + 2\pi) e^{-j\pi/4}]$$

Si calcolino le autotrasformate
corrispondenti alle seguenti trasformate
possibilmente senza eseguire l'integrale
di autotrasformazione -



$$8) \quad X(f) = \frac{2 \cdot \sin [3 (2\pi f - 2\pi)]}{(2\pi f - 2\pi)}$$

Si può ricondurre ad una trasformata di tipo "sinc" che ha per ~~ant~~ antitrasformata (nota) una "rect". Infatti è noto che:

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} A\tau \operatorname{sinc}(f\tau) = \\ = A\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$

Si può scrivere:

$$X(f) = \frac{\overset{A\tau}{6} \cdot \overset{\tau}{\sin[\pi(f-1) \cdot 6]}}{\pi(f-1) \cdot 6} = X_1(f-1)$$

essendo:

$$X_1(f) = \frac{6 \sin(\pi f 6)}{\pi f 6} = A\tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \quad \text{con} \begin{cases} \tau = 6 \\ A = 1 \end{cases}$$

Quindi:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X_1(f)\} = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$$

e riconducendo il teorema della traslazione in frequenza:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X_1(f-1)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X_1(f)\} \cdot e^{j2\pi f_0 t} =} \\ \text{complessa!} \rightarrow = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{6}\right) \cdot e^{j2\pi t} = \begin{cases} e^{j2\pi t} & \text{per } -3 < t < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

9)

⑨

$$X(f) = \cos\left(4 \cdot 2\pi f + \frac{\pi}{3}\right)$$

Si può applicare il teorema di dualità:

se

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \quad \left[= \cos\left(2\pi 4f + \frac{\pi}{3}\right) \text{ nel nostro caso} \right]$$

allora:

$$X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x(-f).$$

Si tratta di trovare $x(t)$ noto $X(f)$.

Si ha:

$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ è noto (trasformata del coseno)

$$X(t) = \cos\left(2\pi 4t + \frac{\pi}{3}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \left[\delta(f-4)e^{j\frac{\pi}{3}} + \delta(f+4)e^{-j\frac{\pi}{3}} \right]$$

Essendo questa uguale a $x(-f)$ (vedi

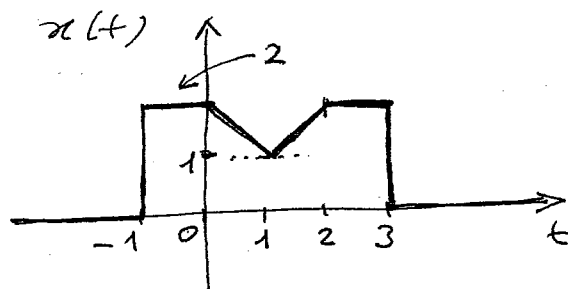
sopra) $x(t)$ è ~~più~~ presto trovata sostituendo a f $-t$:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[\delta(-t-4)e^{j\frac{\pi}{3}} + \delta(-t+4)e^{-j\frac{\pi}{3}} \right]$$

Si osservi anche ~~per~~ che per la simmetria pari di $\delta(t)$ si può scrivere:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[\delta(t+4)e^{j\frac{\pi}{3}} + \delta(t-4)e^{-j\frac{\pi}{3}} \right]$$

11) Sia $X(f)$ la trasformata di Fourier del segnale mostrato in figura



Senza calcolare $X(f)$ si trovi:

11.1) $\angle X(f)$

Il segnale può essere pensato come un segnale pari traslato ~~in~~ di 1 a destra -

Il segnale pari ha fase nulla quindi la fase di $X(f)$ è quella del solo fattore di traslazione:

$$x(t) = x_p(t-1)$$

da cui $\nwarrow$ segnale pari

$$X(f) = X_p(f) \cdot e^{-j2\pi f \cdot 1}$$

e $\nwarrow 0$

$$\angle X(f) = \angle X_p(f) + (-2\pi f) = -2\pi f$$

11.2) $X(0)$

(11)

È noto che

$$X(0) = X(f) \Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \quad \leftarrow \text{è l'area del segnale } x(t)$$

Dalla figura, con geometria elementare si ricava che l'area sottesa da $x(t)$ è 7.

Quindi: $X(0) = 7$

11.3.) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \frac{2 \sin 2\pi f}{2\pi f} e^{j2\pi f} df$

Posto:

$$Y(f) = X(f) \cdot \frac{2 \sin 2\pi f}{2\pi f}$$

l'integrale rappresenta l'autotrasformata di $Y(f)$ calcolata per $t=1$ infatti:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} \Big|_{t=1} = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{j2\pi f t} df \Big|_{t=1} = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{j2\pi f} df$$

Ma l'autotrasformata di $Y(f)$ è la

convoluzione dell'autotrasformata di $X(f)$ (12)
 (cioè il segnale dato) e l'autotrasformata
 di:

$$Z(f) = \frac{2 \sin 2\pi f}{2\pi f} = 2 \cdot \text{sinc}(2f) =$$

$$= A\tau \text{sinc}(f\tau)$$

$$\text{con} \begin{cases} A=1 \\ \tau=2 \end{cases}$$

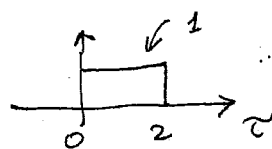
È noto che:

↓

$$\mathcal{F}^{-1}\{Z(f)\} = A \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) = z(t)$$

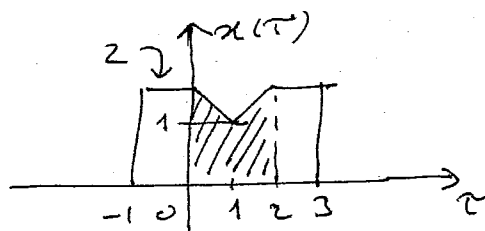
Il valore cercato è quindi:

$$x(t) \otimes z(t) \Big|_{t=1} =$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) z(1-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \text{rect}\left(\frac{1-\tau}{2}\right) d\tau =$$

$$= \int_0^2 x(\tau) d\tau = 3$$



che è uguale all'area trapezzoidale,
 calcolabile ancora con la geometria
 elementare -