

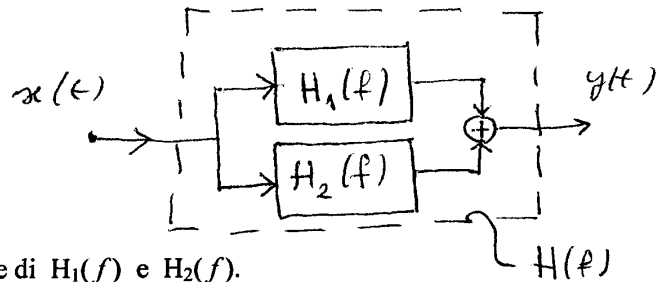
Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B12

Nel sistema LTI in Fig. 1 è:

$$H_1(f) = \Pi(f/2B)$$

$$H_2(f) = \Pi(f/2B) e^{-j(\pi/2)\text{sgn}f}$$



Si traccino i diagrammi di modulo e fase di $H_1(f)$ e $H_2(f)$.

Si trovi l'espressione analitica della risposta in frequenza del sistema complessivo $H(f)$ e se ne traccino i diagrammi di modulo e fase.

Si trovi il segnale di uscita $y(t)$ quando all'ingresso è presente il segnale $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ con $0 < f_0 < B$.

Quesito B12 (soluzione)

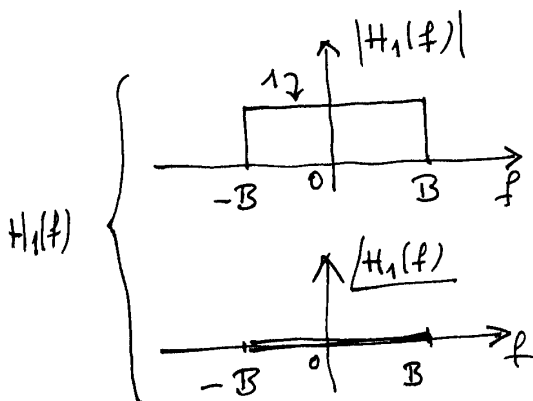
Ricordando la definizione della funzione $\Pi(f)$ si osserva che $H_1(f)$ è reale non negativa quindi:

$$|H_1(f)| = H_1(f) \text{ e } \angle H_1(f) = 0$$

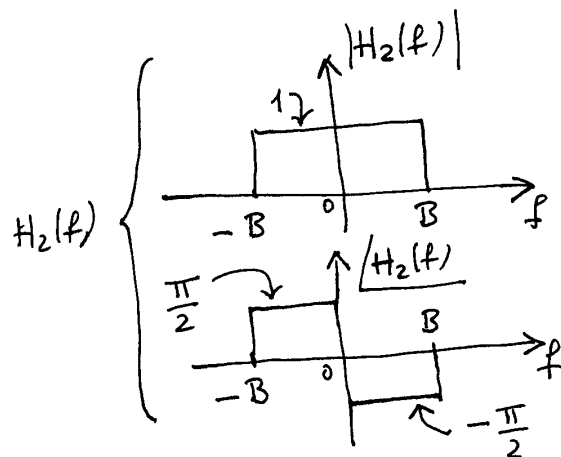
inoltre:

$$|H_1(f)| = |H_2(f)| = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \text{ e } \angle H_2(f) = -\frac{\pi}{2} \text{sgn} f$$

da cui i diagrammi:



$$H_1(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$



$$H_2(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sgn} f}$$

I due sistemi sono in parallelo quindi l'espressione analitica del sistema equivalente $H(f)$ è:

$$\begin{aligned} H(f) &= H_1(f) + H_2(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) (1 + e^{-j\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} f}) = \\ &= \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} f} (e^{j\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} f} + e^{-j\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} f}) = \\ &= 2 \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} f} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} f\right)}_{= \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} f} \end{aligned}$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere osservando che:

$$\begin{aligned} (1 + e^{-j\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} f}) &= \begin{cases} 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}} = 1 - j = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} & \text{per } f > 0 \\ 1 + e^{j\frac{\pi}{2}} = 1 + j = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} & \text{per } f < 0 \end{cases} = \\ &= \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} f} \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$H(f) = \sqrt{2} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} f}$$

da cui:

$$\begin{cases} |H(f)| = \sqrt{2} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \\ \angle H(f) = -\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Diagramma della magnitudine } |H(f)| \text{ vs } f \\ \text{Diagramma della fase } \angle H(f) \text{ vs } f \end{cases}$$

Trattandosi di un sistema LTI, se all'ingresso si trova il segnale $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ all'uscita si trova il segnale:

$$\boxed{y(t) = |H(f_0)| \cdot \cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0)) = \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{4})}$$

dove l'ultima uguaglianza risulta essendo $0 < f_0 < B$.

Si osserva che, sviluppando il coseno:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 2\pi f_0 t + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 2\pi f_0 t = \\ &= \underbrace{\cos 2\pi f_0 t}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\sin 2\pi f_0 t}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \cos 2\pi f_0 t + \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

In questo modo l'uscita risulta scritta come somma delle uscite sui singoli rami del parallelo -