

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B17

Si consideri un sistema il cui segnale di uscita $y(t)$ è uguale alla parte pari del segnale di ingresso $x(t)$.

Si scriva la relazione che lega $x(t)$ e $y(t)$ e si dica se tale sistema è: a) con o senza memoria, b) causale, c) tempo invariante, d) lineare, e) stabile (BIBO).

Quesito B17 - (Soluzione)

La relazione che individua il sistema è:

$$y(t) = x_p(t) \triangleq \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

- a) Il sistema è con memoria perché per conoscere il ^{Valore} dell'uscita $y(t)$ in un generico istante t non è sufficiente conoscere il valore dell'ingresso $x(t)$ nello stesso istante t ma occorre conoscerlo anche nel diverso istante $-t$.
- b) Il sistema non è causale perché per conoscere il valore dell'uscita $y(t)$ in un generico istante t è necessario conoscere il valore dell'ingresso in t e in $-t$, ma per $t < 0$ risulta $-t > t$ quindi $-t$ "è futuro" rispetto a t .

c) Verifica di tempo invariante -

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

$$x_R(t) \triangleq x(t - t_0) \longrightarrow y_R(t) = \frac{1}{2} [x_R(t) + x_R(-t)] =$$

$$= \frac{1}{2} [x(t - t_0) + x(-t - t_0)]$$

diversi!
↙

$$y_{RIT}(t) \triangleq y(t - t_0) = \frac{1}{2} [x(t - t_0) + x(-(t - t_0))] = \frac{1}{2} [x(t - t_0) + x(-t + t_0)]$$

Essendo $y_R(t) \neq y_{RIT}(t)$ il sistema non è tempo-invariante.

d) Verifica di linearità.

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \frac{1}{2} [x_1(t) + x_1(-t)]$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = \frac{1}{2} [x_2(t) + x_2(-t)]$$

$$\begin{aligned} x_3(t) \triangleq \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) &\longrightarrow y_3(t) = \frac{1}{2} [x_3(t) + x_3(-t)] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] + [\alpha x_1(-t) + \beta x_2(-t)] \right\} \end{aligned}$$

Sia:

$$y_c(t) \triangleq \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t) = \frac{1}{2} [\alpha x_1(t) + \alpha x_1(-t)] + \frac{1}{2} [\beta x_2(t) + \beta x_2(-t)]$$

Essendo $y_3(t) = y_c(t)$ il sistema è lineare.

e) Verifica di stabilità.

Sia assuma un ingresso limitato ossia tale che $|x(t)| < M$.

Si osservi che anche la seguente è vera: $|x(-t)| < M$

perché il cambio di segno in t non modifica l'insieme dei valori assunti dal segnale (codominio di $x(t)$).

Quindi $y(t)$ è sicuramente limitato essendo la somma di due quantità limitate (moltiplicate per $\frac{1}{2}$, quantità finita).

Ma vediamo anche analiticamente -

Assunto $|x(t)| < M$ esaminiamo il conseguente valore assoluto dell'uscita:

$$|y(t)| = \frac{1}{2} |x(t) + x(-t)| \leq \frac{1}{2} [|x(t)| + |x(-t)|] \leq \frac{1}{2} (M + M) = M$$

perché con tale assunzione anche l'uscita risulta limitata il sistema è stabile (BIBO).