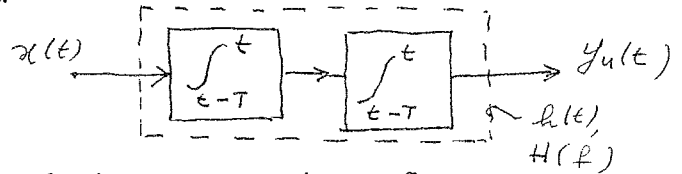


Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B18

Il sistema in figura è costituito dalla cascata di due integratori a finestra mobile identici ciascuno avente la seguente relazione fra ingresso e uscita:

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$



Si trovi la risposta impulsiva $h(t)$ del sistema complessivo e se ne tracci un grafico.

Si trovi la risposta in frequenza $H(f)$ dello stesso sistema e se ne traccino i grafici di modulo e argomento.

Si consideri il segnale di ingresso:

$$x(t) = C[\cos(2\pi 2f_0 t) + \cos(2\pi 3f_0 t)]$$

Si scriva l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ di $x(t)$ e se ne tracci un grafico.

Si trovi un valore di T (in funzione di f_0) tale che il segnale di uscita $y_u(t)$ abbia espressione:

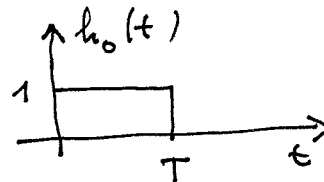
$$y_u(t) = D \cos(2\pi 3f_0 t + \varphi) .$$

Si determinino i conseguenti valori di D e φ (eventualmente in funzione di C e f_0).

Quesito B18 (soluzione)

Detta $h_0(t)$ la risposta impulsiva di un singolo integratore a finestra mobile e noto (o comunque facilmente ricavabile) che è:

$$h_0(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \rightarrow$$



e la risposta in frequenza:

$$H_0(f) = \mathcal{F}\{h_0(t)\} = T \cdot \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

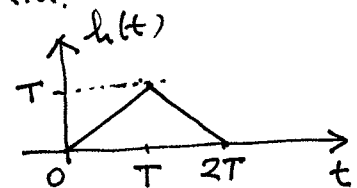
$\nwarrow$ trasf. del rettangolo centrato
 $\nwarrow$ fattore di ritardo di $T/2$

Dato che due integratori sono in cascata:

$$h(t) = h_0(t) * h_0(t) = T \cdot \Lambda\left(\frac{t - T}{T}\right)$$

e

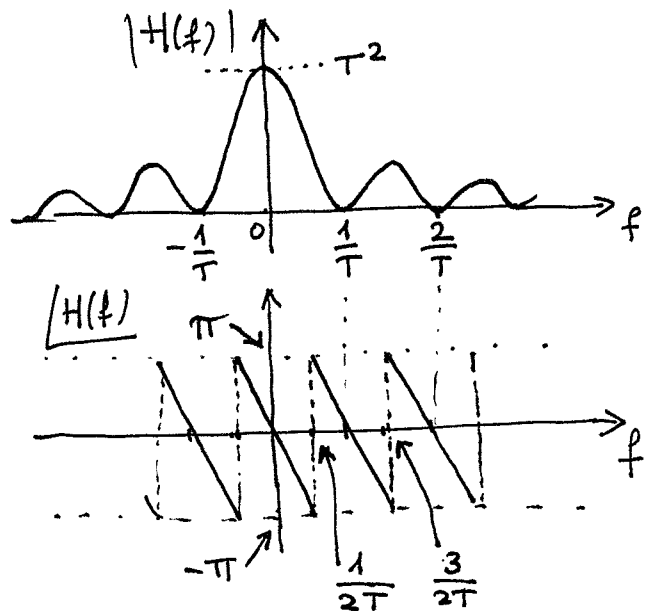
$$H(f) = (H_0(f))^2 = T^2 \text{sinc}^2(fT) e^{-j2\pi f T}$$



Da cui:

$$|H(f)| = T^2 \text{sinc}^2(fT) \rightarrow$$

$$\angle H(f) = -2\pi fT \rightarrow$$



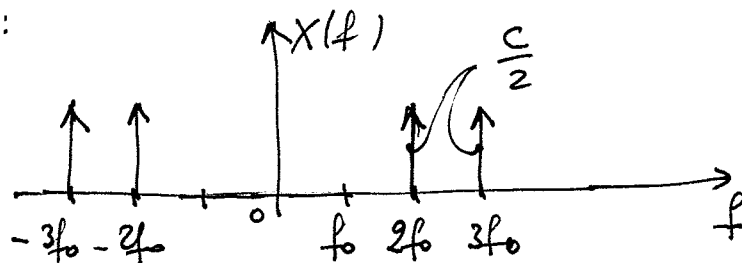
La Tdf del segnale:

$$x(t) = C(\cos 2\pi 2f_0 t + \cos 2\pi 3f_0 t)$$

e:

$$X(f) = \frac{C}{2} [\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0) + \delta(f - 3f_0) + \delta(f + 3f_0)]$$

il cui grafico è:



Si può ottenere il risultato richiesto facendo in modo che il primo zero di $H(f)$ (per $f = \frac{1}{T}$) cada in $2f_0$, ossia:

$$\frac{1}{T} = 2f_0 \rightarrow T = \frac{1}{2f_0} \text{ e } f_0 = \frac{1}{2T}$$

In tal caso "sopravvivono" solo gli impulsi a $\pm 3f_0$ e il segnale di uscita è:

$$y_{ul}(t) = C \cdot |H(3f_0)| \cos(2\pi 3f_0 t + \angle H(3f_0))$$

e risulta:

$$|H(3f_0)| = T^2 \text{sinc}^2\left(3 \cdot \frac{1}{2T} \cdot T\right) = T^2 \cdot \left(\frac{\text{sinc}\left(\pi \frac{3}{2}\right)}{\pi \frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{4}{9} \frac{T^2}{\pi^2} = \frac{1}{(3f_0 \pi)^2}$$

$$\angle H(3f_0) = -2\pi 3 \cdot \frac{1}{2T} T = -3\pi$$

Da cui:

$$\boxed{y_M(t) = C \cdot \underbrace{\frac{4}{9} \frac{T^2}{\pi^2}}_D \cos(2\pi \cdot 3f_0 t - 3\pi) = -C \cdot \frac{4}{9} \frac{T^2}{\pi^2} \cos(2\pi \cdot 3f_0 t) =}$$
$$= -\frac{C}{(3\pi f_0)^2} \cos(2\pi \cdot 3f_0 t)$$

$$\left\{ D = C \cdot \frac{4}{9} \frac{T^2}{\pi^2} = C \cdot \frac{1}{(3\pi f_0)^2} \right.$$

$$\left\{ \varphi = -3\pi \text{ (equivalente a } \varphi = -\pi) \right.$$