

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B1 31/1/2011

Si dica, giustificando le risposte, se il sistema descritto dalla seguente relazione: $y(t) = a x(t) + b$ sia: 1) senza memoria; 2) causale; 3) stabile BIBO; 4) tempo-invariante; 5) lineare.

Per ciascuna proprietà si dica se la presenza della proprietà stessa dipenda dai valori assunti delle costanti a e b .

Quesito B1 - (Soluzione)

- 1) Il sistema è senza memoria perché il valore del segnale di uscita ad un generico istante dipende solo dal valore dell'ingresso nello stesso istante - ciò accade p.es. quando fra l'ingresso e l'uscita c'è un legame funzionale, come in questo caso: $y(t) = g[x(t)]$ - La sussistenza della proprietà non dipende dai valori a e b .
 - 2) Perché il sistema è senza memoria è anche causale - Infatti per ogni istante t il valore dell'uscita non dipende da valori dell'ingresso in istanti $t > t$.
 - 3) La stabilità BIBO si verifica osservando se il valore assoluto dell'uscita è limitato assumendo che il valore assoluto dell'ingresso lo sia - Nel caso in esame assumendo $|x(t)| \leq M$, l'uscita è limitata perché ottenuta moltiplicando $x(t)$ per una costante (assunta finita) e sommando un'altra costante (assunta finita) - Analiticamente:
$$|y(t)| = |a \cdot x(t) + b| \leq |a \cdot x(t)| + |b| = |a| |x(t)| + |b| \leq |a| \cdot M + |b| = K$$

ovvero risulta: $|y(t)| \leq K$, valore finito per ogni a, b, M finiti.
Il sistema è quindi stabile.
- 

4) Verifica della tempo-invarianza:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = a \cdot x(t) + b$$

$$x_R(t) \triangleq x(t-t_0) \longrightarrow y_R(t) = a \cdot x_R(t) + b = a \cdot x(t-t_0) + b$$

$$\text{Uscita ritardata: } y_{RIT}(t) = y(t-t_0) = a \cdot x(t-t_0) + b$$

Perché risulta $y_{RIT}(t) = y_R(t)$ per $\forall x(t), t, t_0, a, b$ il sistema è tempo invariante per qualunque valore di a e b

5) Verifica della linearità -

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = a \cdot x_1(t) + b$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = a \cdot x_2(t) + b$$

$$x_3(t) \triangleq \alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = a \cdot x_3(t) + b = a \cdot \alpha x_1(t) + a \cdot \beta x_2(t) + b$$

Consideriamo una combinazione lineare delle uscite (con gli stessi coefficienti α e β):

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t) = \alpha [a x_1(t) + b] + \beta [a x_2(t) + b] = \\ &= \alpha a x_1(t) + \alpha b + \beta a x_2(t) + \beta b \end{aligned}$$

La linearità richiede che sia $y_c(t) = y_3(t)$ per qualunque $x_1(t), x_2(t), t, \alpha, \beta$ - nel caso in esame ciò non accade con a e b generici, quindi il sistema è non lineare - L'uguaglianza sussiste, e quindi il sistema risulta lineare, nel caso sia $b=0$.