

Esame di TEORIA DEI SEGNALI

Quesito B2 - (soluzione)

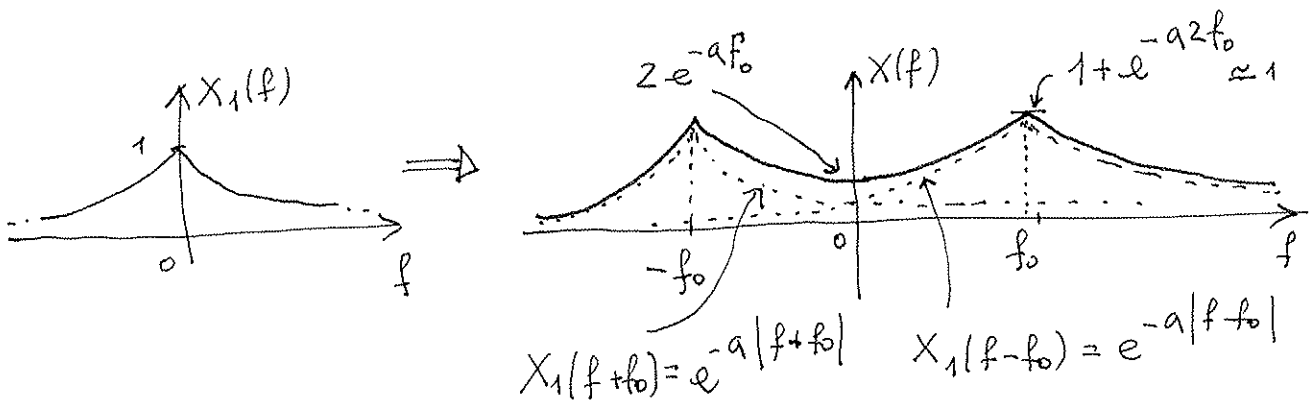
- 1) Il segnale $x(t)$ è reale e pari perché ha trasformata di Fourier $X(f)$ reale e pari (v. teoria) infatti $X(f)$ è una funzione reale di f ed è anche pari perché risulta

$$\boxed{X(-f) = e^{-a|-f-f_0|} + e^{-a|-f+f_0|} = e^{-a|f+f_0|} + e^{-a|f-f_0|} = \boxed{X(f)}}$$

- 2) Diagrammi di modulo e fase di $X(f)$ -

La fase è nulla per qualunque f perché $X(f)$ è reale positiva.

Il modulo $|X(f)|$ coincide quindi con $X(f)$ e si può vedere come somma di due versioni traslate di $X_1(f) = e^{-a|f|}$:



- 3) Espressione di $x(t)$ e grafico -

Osservando l'espressione di $X(f)$ si nota che può essere pensata come ottenuta applicando il teorema della modulazione alla trasformata $M(f) \triangleq 2 \cdot e^{-a|f|}$ infatti risulta:

$$X(f) = \frac{1}{2} [M(f-f_0) + M(f+f_0)] \quad \text{e quindi, detta } m(t) \text{ la}$$

antitrasformata di $M(f)$, risulta: $x(t) = m(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t$

si tratta quindi di trovare $m(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ M(f) \}$.

Si ricordi la trasformata notevole:

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j2\pi f}$$

e da questa:

$$e^{-a|t|} = [e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t)] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Applicando il teorema di dualità risulta:

$$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-a|f|} = e^{-a|f|} = \frac{1}{2} M(f)$$

$$\xleftarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} m(t) \xleftarrow{\mathcal{F}}$$

Ed infine:

$$x(t) = \frac{4a}{a^2 + (2\pi t)^2} \cdot \cos 2\pi f_0 t$$

$\nwarrow$ modulante (inviluppo) $\nwarrow$ portante

il cui grafico è (per $T_0 \ll a$):

