

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quanto B22 - (soluzione)

- 1) Ricordando la risposta in frequenza di un ritardatore e osservando che il sistema dato è il parallelo di due sistemi si ha:

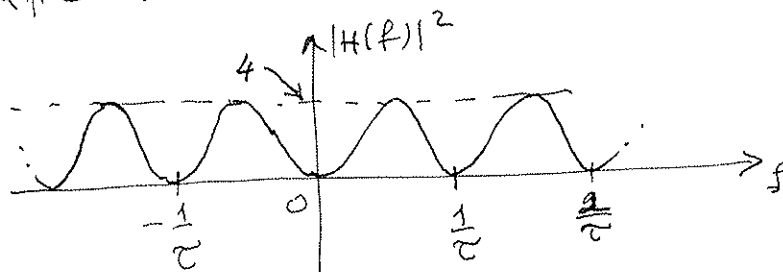
$$H(f) = 1 - e^{-j2\pi f\tau} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{Formula di Euler} \\ \nwarrow \text{Ritardatore} \\ \nearrow \text{Ramo unitario} \end{array} = 1 - (\cos 2\pi f\tau - j \sin 2\pi f\tau)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= (1 - \cos 2\pi f\tau)^2 + (\sin 2\pi f\tau)^2 = \\ &= 1 - 2\cos 2\pi f\tau + \cos^2 2\pi f\tau + \sin^2 2\pi f\tau = \\ &= \boxed{2 - 2\cos 2\pi f\tau} \end{aligned}$$

$$\angle H(f) = \arctg \left[\frac{\sin(2\pi f\tau)}{1 - \cos(2\pi f\tau)} \right]$$

E il grafico richiesto è:



- 2) Per avere in uscita un segnale identicamente nullo il segnale di ingresso deve avere spettro diverso da zero solo nei punti in cui $H(f) = 0$ e ciò accade per ogni segnale periodico di frequenza fondamentale $f_0 = \frac{1}{\tau}$ (periodo τ). Un tale segnale è p.es. $x(t) = \cos(2\pi \frac{t}{\tau})$.

(segue)

1bis) Il punto 1) poteva essere risolto anche come segue -

$$H(f) = 1 - e^{-j2\pi f\tau} = e^{-j\pi f\tau} \cdot (e^{j\pi f\tau} - e^{-j\pi f\tau}) =$$

$$= 2j \sin \pi f\tau \cdot e^{-j\pi f\tau}$$

Da cui

$$\boxed{|H(f)|^2 = 4 \sin^2 \pi f\tau = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi f\tau \right) = 2 - 2 \cos 2\pi f\tau}$$

$$\angle H(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \pi f\tau & \text{per } \sin \pi f\tau > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \pi f\tau \pm \pi & \text{per } \sin \pi f\tau < 0 \end{cases}$$

2bis) Il punto 2) poteva essere risolto anche come segue, operando nel dominio del tempo.

Il segnale di uscita si può scrivere

$$y(t) = x(t) - x(t-\tau)$$

Se si impone $y(t) = 0$ (uscita identicamente nulla)
 Ciò equivale a trovare un segnale di ingresso che
 soddisfa la seguente:

$$x(t) - x(t-\tau) = 0 \rightarrow x(t) = x(t-\tau)$$

Un segnale del genere è un qualunque segnale
 periodico di periodo τ (si veda la definizione di
 segnale periodico).