

(1)

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B26 - (Soluzione)

Si può applicare la proprietà campionatrice della delta di Dirac secondo cui: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$

Ponendo quindi:

$x(t) = (t-1) u(t-2)$ e $t_0 = 3$ si ha l'integrale dato, che quindi vale: $x(3) = (3-1) u(3-2) = 2 \cdot 1 = 2$.

Quesito B27 - (Soluzione)

Un segnale è pari se vale la seguente: $x(t) = x(-t)$.
Occorre trovare il valore di φ per cui la seguente è soddisfatta per ogni t :

$$x(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi f t + \varphi) = \sqrt{2} \cos(2\pi f (-t) + \varphi) = x(-t)$$

$$\cos(2\pi f t) \cdot \cos \varphi - \sin(2\pi f t) \cdot \sin \varphi = \cos[2\pi f (-t)] \cdot \cos \varphi - \sin 2\pi f (-t) \cdot \sin \varphi$$

$$\rightarrow \sin 2\pi f t \cdot \sin \varphi = \sin 2\pi f t \cdot \sin \varphi$$

Questa è soddisfatta per ogni t solo se $\sin \varphi = 0$
ovvero per $\boxed{\varphi = k\pi}$ con k intero.

Quesito B28 - (Soluzione)

La potenza (normalizzata) del segnale $x(t)$ è:

$$P \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

Consideriamo l'integrando nel caso dato:

$$x^2(t) = V_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \varphi_1) + 2 V_1 V_2 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cdot \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) + V_2^2 \cos^2(2\pi f_2 t + \varphi_2) =$$

$$= \frac{V_1^2}{2} [1 + \cos(2 \cdot 2\pi f_1 t + 2\varphi_1)] + \frac{2 V_1 V_2}{2} [\cos[2\pi(f_1 + f_2)t + \varphi_1 + \varphi_2] + \cos[2\pi(f_1 - f_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]] + \frac{V_2^2}{2} [1 + \cos(2 \cdot 2\pi f_2 t + 2\varphi_2)]$$

E applicando l'integrale e il limite risulta: $\boxed{P = \frac{V_1^2}{2} + \frac{V_2^2}{2} = P_1 + P_2}$

a) Il sistema è con memoria perché per calcolare l'uscita $y(\bar{t})$ in qualunque istante $\bar{t}$ sono necessari i valori dell'ingresso nell'intervallo $[0, \bar{t}]$.

b) Verifica di tempo-invarianza -

$$x(t) \longrightarrow \int_0^t x(\tau) d\tau = y(t)$$

$$x_R(t) \triangleq x(t-t_0) \longrightarrow \int_0^t x_R(\tau) d\tau = y_R(t) = \int_0^t x(\tau-t_0) d\tau$$

col cambio di variabile $\tau-t_0=\lambda$ si ha:

$$\text{Uscita con ingresso ritardato: } y_R(t) = \int_{-t_0}^{t-t_0} x(\lambda) d\lambda$$

$$\text{Uscita ritardata: } y_{RIT}(t) = y(t-t_0) = \int_0^{t-t_0} x(\tau) d\tau$$

↗ Divergi!

Essendo $y_R(t) \neq y_{RIT}(t)$ il sistema non è tempo invariante.

c) Verifica di linearità:

$$x_1(t) \longrightarrow \int_0^t x_1(\tau) d\tau = y_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow \int_0^t x_2(\tau) d\tau = y_2(t)$$

$$x_3(t) = \alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t) \longrightarrow \int_0^t x_3(\tau) d\tau = \int_0^t [\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)] d\tau =$$

$$= \alpha \int_0^t x_1(\tau) d\tau + \beta \int_0^t x_2(\tau) d\tau = y_3(t)$$

$$\text{Poiché è: } y_3(t) = \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t)$$

il sistema è lineare.

d) Verifica di causalità.

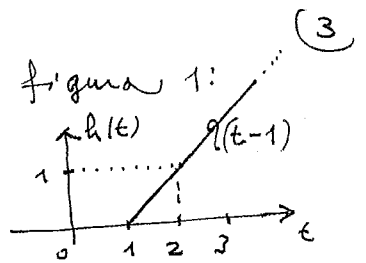
Poiché per il calcolo di $y(\bar{t})$ i valori necessari dell'ingresso sono nell'intervallo $[\bar{t}, 0]$, quando $\bar{t} < 0$ tutti i valori necessari sono maggiori di $\bar{t}$ e quindi "futuri" rispetto a $\bar{t}$ stesso.

Il sistema è quindi non causale.

Quesito B30 - (Soluzione)

a) L'espressione analitica di $h(t)$ come in

$$\bar{e}: h(t) = (t-1)u(t-1) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 1 \\ (t-1) & \text{per } t > 1 \end{cases}$$

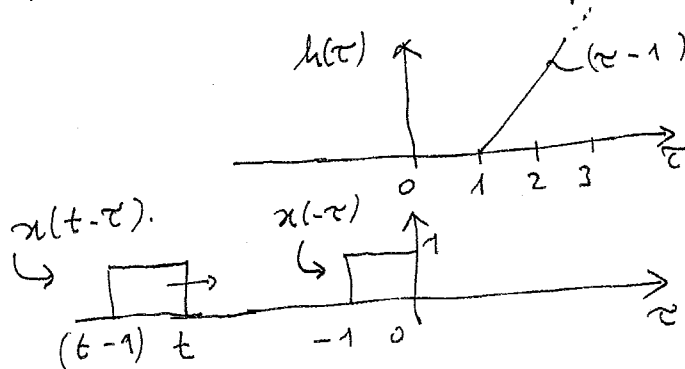


b) L'uscita del sistema quando all'ingresso si trova il segnale $x(t)$ in figura 2

$$\text{si ricava da: } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

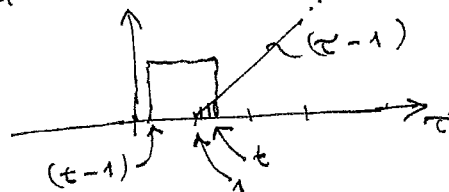
(convoluzione).

Per il calcolo sono utili i diagrammi:



Per $t \leq 1$ il prodotto $x(t-\tau) \cdot h(\tau)$ è sempre nullo.

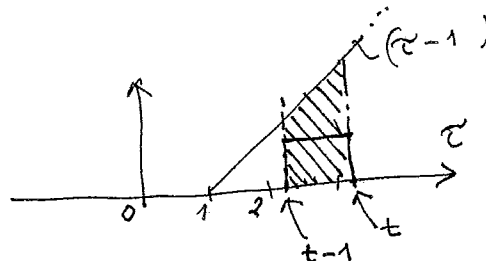
Per $1 < t \leq 2$ la situazione è:



quindi:

$$y(t) = \int_1^t (\tau-1) d\tau = \left[\frac{1}{2} \tau^2 - \tau \right]_1^t = \frac{1}{2} t^2 - t - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2}$$

Per $t > 2$ è:



quindi:

$$y(t) = \int_{t-1}^t (\tau-1) d\tau = \left[\frac{1}{2} \tau^2 - \tau \right]_{t-1}^t = \frac{1}{2} t^2 - t - \left[\frac{1}{2} (t-1)^2 - (t-1) \right] =$$

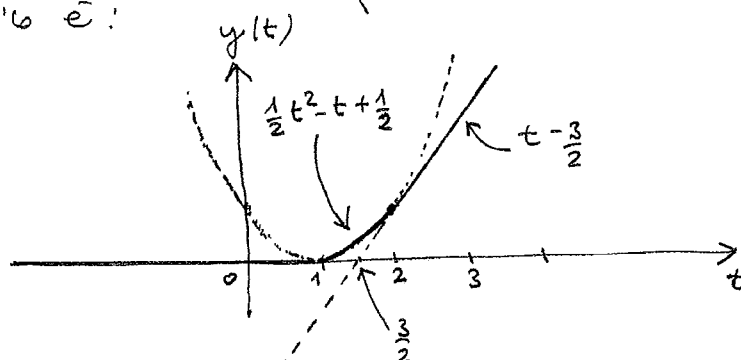
$$= \frac{1}{2} t^2 - t - \left[\frac{1}{2} t^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} - t + 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} t^2 - t - \frac{1}{2} t^2 + t - \frac{1}{2} + t - 1 = t - \frac{3}{2}$$

Quindi infine:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 1 \\ \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} & \text{per } 1 < t \leq 2 \\ t - 3 & \text{per } t > 2 \end{cases}$$

E il grafico è:



c) La risposta alla coppia di impulsi in figura 3 si ricava sommando la risposta a ciascuno di essi (per la linearità) ottenuta ritardando (o anticipando) la risposta $h(t)$ della quantità corrispondente alla posizione dei due impulsi (per la tempo-invarianza), cioè:

$$y(t) = -h(t-1) + h(t+1)$$

E il grafico corrispondente:

