

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B36 (Soluzione)

Sappiamo dalla teoria che quando un segnale sinusoidale transita in un filtro (sistema lineare e stazionario), il segnale di uscita è ancora sinusoidale con la stessa frequenza dell'ingresso. Ampiezza e fase iniziale vengono alterati dalla risposta in ampiezza e dalla risposta in fase del sistema (modulo e argomento della funzione di trasferimento $H(f)$), secondo il seguente schema generale:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow y(t) = A \cdot A_H(f_0) \cos(2\pi f_0 t + \varphi + \varphi_H(f_0))$$

dove $H(f) = A_H(f) \cdot e^{j\varphi_H(f)}$

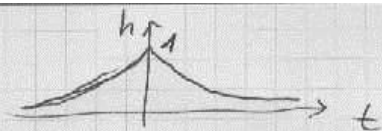
Nel nostro caso:

$$x(t) = \cos(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad \text{con} \begin{cases} A = 1 \\ f_0 = 1/2\pi \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo la $H(f)$ come trasformata $\mathcal{F}$ della risposta impulsiva, notando che

$$h(t) = e^{-|t|} =$$

$$= e^{-t} u(t) + e^{+t} u(-t)$$



$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \mathcal{F}[e^{-t} u(t)] + \mathcal{F}[e^{+t} u(-t)] = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{1-j2\pi f} =$$

$$= \frac{(1-j2\pi f) + (1+j2\pi f)}{(1+j2\pi f)(1-j2\pi f)} = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}$$

dove abbiamo sfruttato la trasformata notevole di un esponenziale negativo causale, oltre alle proprietà di linearità e inversione temporale della $\mathcal{F}$.

$$H(f_0) = H\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{2}{1+(2\pi \cdot \frac{1}{2\pi})^2} = \frac{2}{1+1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} A_H(f_0) = 1 \\ \varphi_H(f_0) = 0 \end{cases}$$

$\underbrace{1 \cdot e^{j0}}_{=1 \cdot e^{j0}} \rightarrow$

Dunque

$$y(t) = 1 \cdot 1 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} t + 0 + 0\right) = \cos(t) = x(t)$$

l'uscita coincide con l'ingresso! (NOTA: vale solo per questo particolare ingresso, cioè per la particolare frequenza $f_0 = 1/2\pi$)