

# Esame di TEORIA DEI SEGNALE

## Quesito B44 23/11/12

Si consideri un sistema retto dalla seguente relazione:

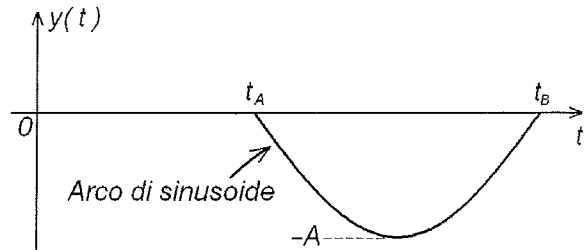
$$y(t) = x(t) \cdot w(t)$$

dove  $y(t)$  e  $x(t)$  sono i segnali di ingresso e di uscita e  $w(t)$  è una data funzione del tempo.

a) Sapendo che se il segnale di ingresso è:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \pi/4)$$

il segnale di uscita è come in figura, si trovi l'espressione analitica di  $w(t)$  utilizzando la funzione  $\Pi(t)$  [oppure  $\text{rect}(t)$ ] e i parametri della sinusoide in ingresso.

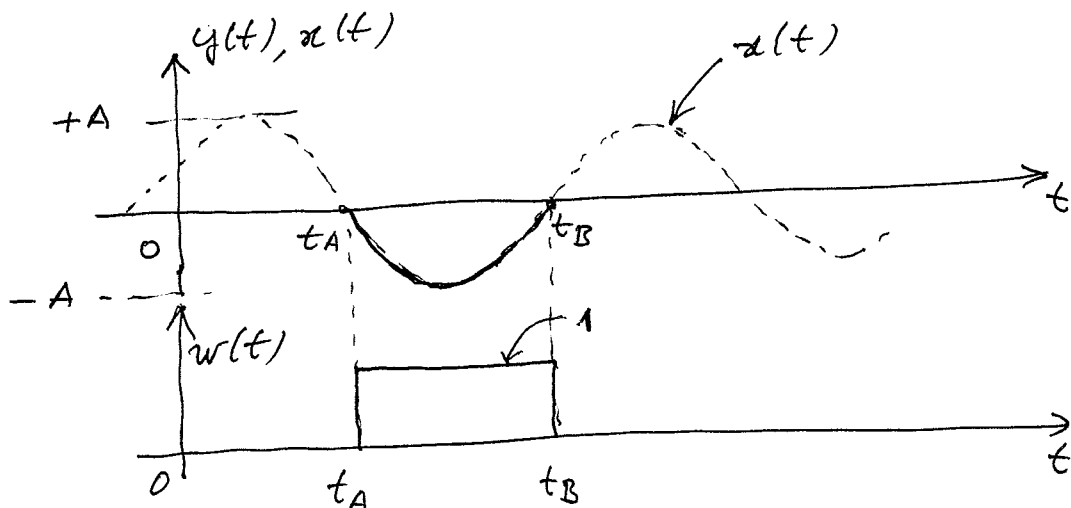


Con la funzione  $w(t)$  trovata (oppure con una  $w(t)$  generica) si dica se il sistema sia:

b) con memoria, c) causale, d) tempo-invariante, e) lineare, f) stabile, giustificando le risposte.

## Quesito B44 (soluzione)

4a) Il segnale  $y(t)$  dato si può ottenere dalla sinusoide di ingresso moltiplicandola per un impulso rettangolare che ne isoli il semiperiodo dato (o qualunque altro a valori negativi) -



I valori di  $t_A$  e  $t_B$  si ricavano dall'equazione:

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

ovvia:

$$\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{4}\right) = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \leftarrow \text{zeri del coseno}$$

da cui:

$$t_A = \frac{1}{2f_0} \left[ \frac{2k+1}{2} + \frac{1}{4} \right] \quad \leftarrow \text{con } k \text{ pari per avere coseno discendente -}$$

Si può scegliere p. es.  $k=0$  che è il valore di  $k$  minimo che dà  $t_A > 0$  come proposto in figura - Il valore di  $t_B$  si trova

sommando a  $t_A$  un semiperiodo ovvia  $t_B = t_A + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f_0}$  -

Quindi con  $k=0$ :

$$\begin{cases} t_A = \frac{1}{2f_0} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2f_0} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{f_0} \\ t_B = t_A + \frac{1}{2f_0} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{f_0} + \frac{1}{2f_0} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{f_0} \end{cases}$$

L'espressione analitica di  $w(t)$  è quella di un impulso rettangolare di durata:  $T = t_B - t_A = \left(\frac{7}{8} - \frac{3}{8}\right) \frac{1}{f_0} = \frac{1}{2f_0}$

e centrato in:  $\frac{t_A + t_B}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{8} + \frac{7}{8} \right) \cdot \frac{1}{f_0} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{f_0}$ , ovvia:

$$w(t) = \Pi \left( \frac{t - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{f_0}}{\frac{1}{2f_0}} \right) = \Pi \left( 2f_0 t - \frac{5}{4} \right)$$

Analisi delle caratteristiche del sistema, con  $w(t)$  generica.

#### 4b) Memoria

Il sistema è senza memoria perché per conoscere il valore dell'uscita  $y(t)$  in un generico istante  $t$  è sufficiente conoscere il valore dell'ingresso  $x(t)$  nello stesso istante -  
Ciò è vero qualunque sia  $w(t)$  la cui forma non influenza il ragionamento.

#### 4c) Causalità

Il sistema è causale in quanto è senza memoria -

#### 4d) Tempo invariante

Si ha:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(t) \cdot w(t)$$

$$x_R(t) \triangleq x(t-t_0) \longrightarrow y_R(t) = x_R(t) \cdot w(t) = x(t-t_0) \cdot w(t)$$

Uscita ritardata:

$$y_{RIT}(t) \triangleq y(t-t_0) = x(t-t_0) \cdot w(t-t_0)$$

diversi!

Essendo  $y_R(t) \neq y_{RIT}(t)$  il sistema non è tempo invariante  
(per qualunque  $w(t)$ )

#### 4e) Linearità

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = x_1(t) \cdot w(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = x_2(t) \cdot w(t)$$

$$\begin{aligned} x_3(t) \triangleq \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) &\longrightarrow y_3(t) = x_3(t) \cdot w(t) = \\ &= [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \cdot w(t) = \\ &= \alpha x_1(t) \cdot w(t) + \beta x_2(t) \cdot w(t) \end{aligned}$$

Sia:

$$y_c(t) \triangleq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha x_1(t) \cdot w(t) + \beta x_2(t) \cdot w(t)$$

uguali!

Essendo  $y_3(t) = y_c(t)$  il sistema è lineare (per qualunque  $w(t)$ )

#### 4f) Stabilità

Si assuma  $x(t)$  limitata ossia  $|x(t)| < M$  ed esaminiamo il conseguente valore assoluto dell'uscita:

$$|y(t)| = |x(t) \cdot w(t)| = |x(t)| \cdot |w(t)| \leq M \cdot |w(t)|$$

La quantità  $M \cdot |w(t)|$  è finita, e quindi il sistema è stabile solo nel caso in cui  $|w(t)| < K$  ossia per tutte le funzioni  $w(t)$  limitate.

La funzione  $w(t)$  trovata è limitata quindi con essa il sistema è stabile.