

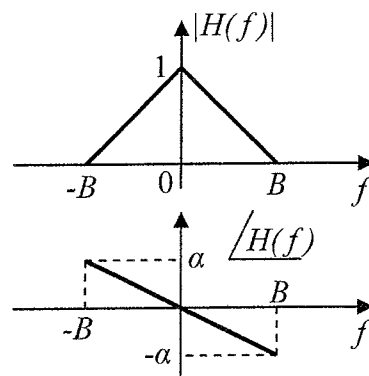
Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Esercizio n. 5 (B45)

Un sistema LTI ha risposta in frequenza $H(f)$ come in figura.

a) Si trovi la risposta all'impulso unitario $h(t)$ del sistema (espressione analitica).

b) Successivamente si assuma per α un valore tale che $h(0) = 0$ e si tracci un grafico di $h(t)$ in tal caso.



Querito B45 (soluzione)

a) L'espressione analitica di $H(f)$ è (dal grafico):

$$H(f) = \Lambda\left(\frac{f}{B}\right) e^{-j f \frac{\alpha}{B}} = \left(1 - \frac{|f|}{B}\right) e^{-j f \frac{\alpha}{B}} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right).$$

La fase è rettilinea: $\angle H(f) = -f \frac{\alpha}{B} = -2\pi f \frac{\alpha}{2B\pi} = -2\pi f t_0$

perciò causa un ritardo $t_0 = \frac{\alpha}{2\pi B}$ nell'autotrasformata

di $\Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$. Quindi, posto: $h_0(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\Lambda\left(\frac{f}{B}\right)\right\}$ si avrà:

$$h(t) = h_0(t - t_0) = h_0\left(t - \frac{\alpha}{2\pi B}\right).$$

Troviamo quindi $h_0(t)$.

È noto che: $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = \text{sinc}^2(f)$. (V. Vannucci (3.38), p. 75)

Dal teorema di dualità si ha:

$$\text{sinc}^2(t) \longleftrightarrow \Lambda(-f) = \Lambda(f) \leftarrow \text{Parità di } \Lambda(f)$$

E dal teorema del cambiamento di scala:

$$\text{sinc}^2(Bt) \longleftrightarrow \frac{1}{B} \Lambda\left(\frac{f}{B}\right) \quad (\text{essendo } B > 0).$$

Quindi è:

$$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\Lambda\left(\frac{f}{B}\right)\right\} = B \text{sinc}^2(Bt)$$

e infine:

$$\boxed{h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = h_0\left(t - \frac{\alpha}{2\pi B}\right) = B \cdot \text{sinc}^2\left[B\left(t - \frac{\alpha}{2\pi B}\right)\right]}$$

b) Il grafico di $h_0(t) = B \cdot \text{sinc}^2(Bt)$ è in figura

Per avere $h(0) = 0$ occorre traslare $h_0(t)$ in modo che uno dei suoi zeri cada in $t = 0$. Ciò si ottiene, per esempio, ritardando di

$t_0 = \frac{1}{B}$ (vedi grafico) da cui:

$$t_0 = \frac{\alpha}{2\pi B} = \frac{1}{B} \longrightarrow \boxed{\alpha = 2\pi}$$

da cui:

$$h(t) = B \cdot \text{sinc}^2\left[B\left(t - \frac{1}{B}\right)\right]$$

il cui grafico è in figura.

