

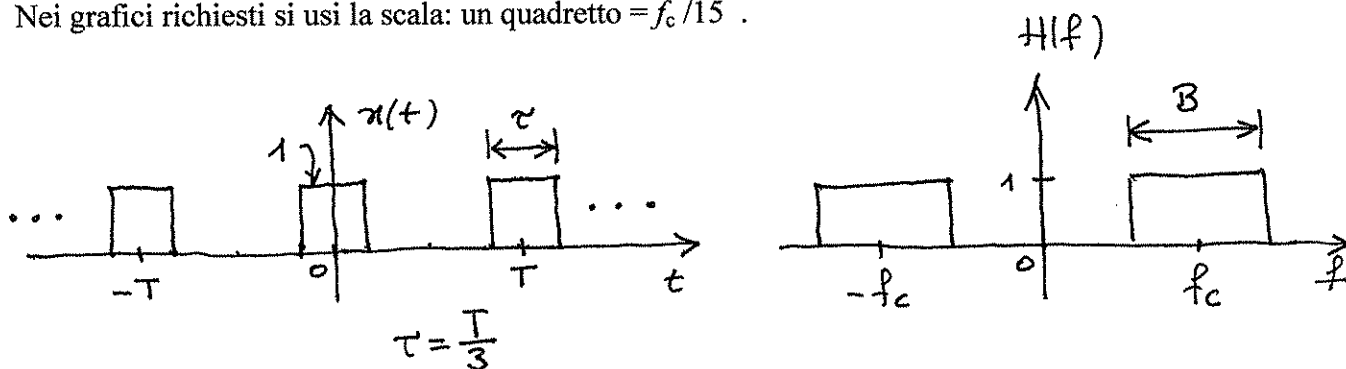
Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B50

Un segnale periodico $x(t)$ come in figura, avente frequenza fondamentale $f_0 = 1/T$ e $\tau = T/3$ attraversa un filtro passa banda ideale $H(f)$ di frequenza centrale f_c e banda $B = 3/5 f_c$ (vedi figura). Nei tre casi seguenti si tracci il modulo dello spettro a righe $|X_k|$ di $x(t)$ e il modulo della risposta in frequenza del filtro $|H(f)|$ limitatamente all'intervallo $0 < f < 2f_c$ e si scriva la corrispondente espressione del segnale di uscita $y(t)$

- a) $f_0 = f_c$; b) $f_0 = f_c/3$; c) $f_0 = f_c/5$.

Nei grafici richiesti si usi la scala: un quadretto $= f_c/15$.



Quesito B50 (Soluzione)

È noto che un segnale come quello dato ha coefficienti di Fourier:

$$X_k = \frac{\tau}{T} \text{sinc}(k f_0 \tau) \quad \text{per } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dove $f_0 = \frac{1}{T}$ è la frequenza fondamentale -

Tale espressione si può tuttavia facilmente ricavare dall'espressione generale del generico coefficiente X_k di un segnale periodico di periodo T che nel corso in esame dà:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T} \frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0} \bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 \frac{\tau}{2}} - e^{j2\pi k f_0 \frac{\tau}{2}}}{-j2\pi k f_0} \right] = \frac{1}{T} \cdot \tau \frac{\sin(2\pi k f_0 \frac{\tau}{2})}{\pi k f_0 \tau} = \frac{\tau}{T} \text{sinc}(k f_0 \tau) \end{aligned}$$

Nel caso proposto, essendo: $T = \frac{1}{3f_0}$ i coefficienti hanno espressione: (1)

$$X_k = \left(\frac{T}{3} \right) \cdot \frac{1}{T} \operatorname{sinc} \left(k f_0 \left(\frac{1}{3f_0} \right) \right) = \frac{1}{3} \operatorname{sinc} \left(\frac{k}{3} \right) = \frac{1}{3} \operatorname{sinc} \left(\frac{f}{3f_0} \right) \Big|_{f=kf_0}$$

Tale espressione si annulla per $k = \pm 3, \pm 6 \dots$; valori di k corrispondenti alle frequenze $\pm 3f_0, \pm 6f_0$ ecc.

Il segnale in uscita dal filtro passa banda sarà comunque una somma di un certo numero di sinusoidi a frequenze multiple della fondamentale individuate dalle righe dello spettro di $x(t)$ che si trovano a frequenze entro la banda passante del filtro, ossia nell'intervallo:

$$f_c - \frac{1}{2} \frac{3}{5} f_c < f < f_c + \frac{1}{2} \frac{3}{5} f_c \longrightarrow \boxed{\frac{7}{10} f_c < f < \frac{13}{10} f_c}$$

$\nwarrow f_L$
 $\nwarrow f_H$

Gli indici k (interi!) che individuano le righe "che passano" devono quindi soddisfare la seguente ^{scritta} limitatamente ai $k \geq 0$:

$$\frac{7}{10} f_c < k f_0 < \frac{13}{10} f_c \longrightarrow \boxed{\frac{7}{10} \frac{f_c}{f_0} < k < \frac{13}{10} \frac{f_c}{f_0}} \quad (2)$$

L'espressione generale del segnale di uscita $\bar{e}$, come noto:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) \cdot X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t} =$$

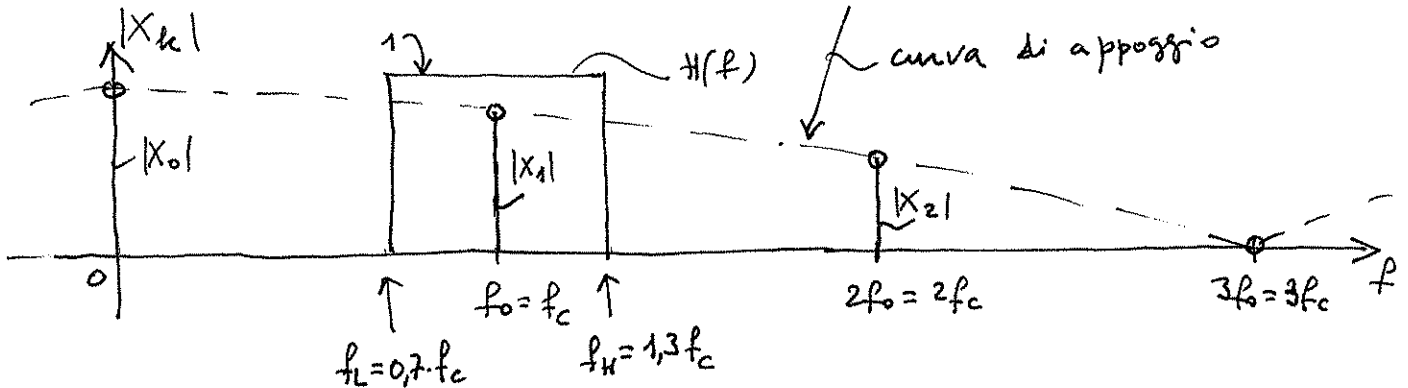
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \cdot |H(kf_0)| \cdot |X_k| \cos \left(2\pi k f_0 t + \angle X_k + \angle H(kf_0) \right)$$

Nel caso in esame $\bar{e}$: $|H(kf_0)| = 1$, $\angle H(kf_0) = 0$ per le righe entro la banda passante quindi l'espressione diventa:

$$y(t) = \sum_k 2 \cdot |X_k| \cdot \cos \left(2\pi k f_0 t + \angle X_k \right) \quad \text{per } k \text{ (interi) nell'intervallo (2).}$$

a) In questo caso $\boxed{f_0 = f_c}$ quindi: (vedi anche i grafici):

$$X_k = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{k}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{f}{3f_0}\right) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{f}{3f_c}\right) \Big|_{f=kf_c}$$



Come si vede passa una sola riga: per $k=1$ (e $k=-1$) -
In fatti $\bar{e}$ (vedi (27)):

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{f_c}{f_c} < k < \frac{13}{10} \cdot \frac{f_c}{f_c} \rightarrow 0,7 < k < 1,3 \rightarrow \boxed{k=1}$$

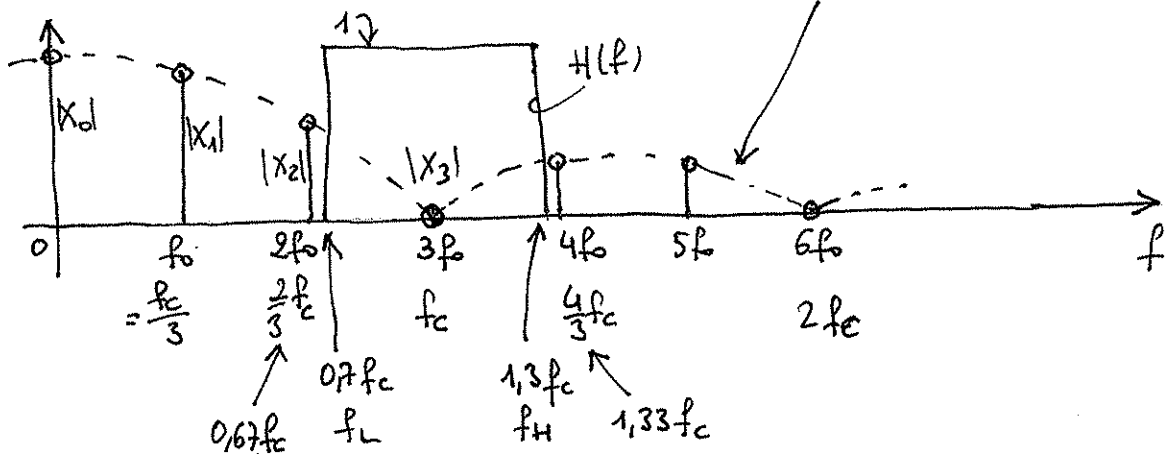
Il segnale di uscita $\bar{e}$ in tal caso:
 $\bar{e} = 0$ (perché X_1 è reale > 0)

$$y(t) = 2 \cdot |X_1| \cos(2\pi f_0 t + \angle X_1) = 2 \cdot \left| \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{1}{3}\right) \right| \cos 2\pi f_0 t = 2 \cdot \frac{1}{3} \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3}} \cos 2\pi f_0 t = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos 2\pi f_0 t$$

$$\boxed{= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos 2\pi f_0 t}$$

b) In questo caso $\boxed{f_0 = \frac{f_c}{3}}$ quindi:

$$X_k = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{k}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{f}{3(f_c/3)}\right) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_c}\right) \Big|_{f=k \frac{f_c}{3}}$$



Come si vede, anche in questo caso passa una sola riga: per $k=3$ (e $k=-3$), che però è di ampiezza zero. Infatti è:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{f_c}{(f_c/3)} < k < \frac{13}{10} \frac{f_c}{(f_c/3)} \rightarrow 2,1 < k < 3,9 \rightarrow \boxed{k=3}$$

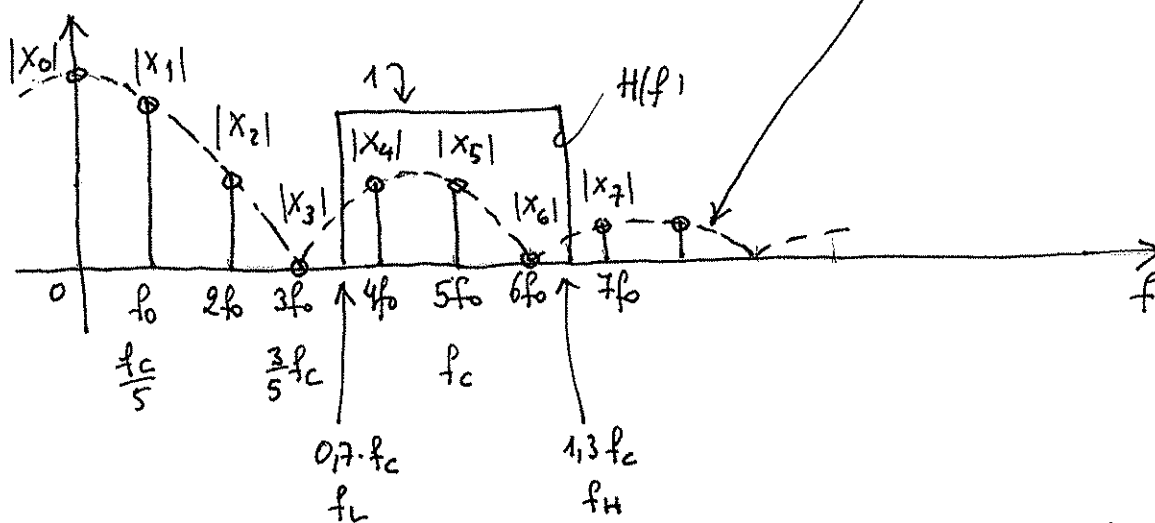
Il segnale di uscita è:

$$y(t) = 2 \cdot |X_3| \cos(2\pi(3f_0)t + \angle X_3) = 2 \cdot \left| \frac{1}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{3}{3}\right) \right| \cos 2\pi f_0 t = 0$$

In questo caso il segnale di uscita è identicamente nullo.

c) In questo caso è $\boxed{f_0 = \frac{f_c}{5}}$ quindi:

$$X_k = \frac{1}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{3}\right) = \frac{1}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{3(f_c/5)}\right) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{5f}{3f_c}\right) \Big|_{f=k \cdot \frac{f_c}{5}}$$



Come si vede, in questo caso passano tre righe: per $k=4, 5, 6$ (e $k=-4, -5, -6$) ma solo le prime due hanno ampiezza diversa da zero.

Infatti è:

$$\frac{7}{10} \frac{f_c}{(f_c/5)} < k < \frac{13}{10} \frac{f_c}{(f_c/5)} \rightarrow 3,5 < k < 6,5 \rightarrow \boxed{k=4, 5, 6}$$



I coefficienti di Fourier necessari valgono:

$$X_4 = \frac{1}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \angle X_4 = \pi$$

$$X_5 = \frac{1}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)}{\left(\frac{5}{3}\pi\right)} = \frac{1}{5\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \angle X_5 = \pi$$

$$X_6 = \frac{1}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{6}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

Il segnale di uscita è quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \cdot \left| \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right| \cos(2\pi 4f_0 t + \pi) + 2 \cdot \left| \frac{1}{5\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right| \cos(2\pi 5f_0 t + \pi) + 0 = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \cos(2\pi \cdot 4f_0 t) - \frac{\sqrt{3}}{5\pi} \cos(2\pi \cdot 5f_0 t) \end{aligned}$$