

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B59

Si consideri un sistema retto dalla seguente relazione:

$$y(t) = x(t) \cdot \operatorname{sgn}[x(t)]$$

dove la funzione $\operatorname{sgn}[\cdot]$ è la funzione segno. Si dica se il sistema sia:

a) con memoria, b) causale, c) tempo-invariante, d) lineare, e) stabile, giustificando le risposte.

Quesito B59 (Soluzione)

Si può osservare che: $y(t) = x(t) \cdot \operatorname{sgn}[x(t)] = |x(t)|$.

a) Il sistema è senza memoria perché per calcolare il valore dell'uscita in ogni istante è sufficiente il valore dell'ingresso nello stesso istante -

b) Ogni sistema senza memoria è anche causale -

c) Sia $x_R(t) \triangleq x(t-t_0)$ un ingresso traslato nel tempo e sia $y_R(t)$ la corrispondente uscita - si ha:

$$\begin{aligned} x_R(t) \triangleq x(t-t_0) &\longrightarrow y_R(t) = x_R(t) \cdot \operatorname{sgn}[x_R(t)] = \\ &= x(t-t_0) \cdot \operatorname{sgn}[x(t-t_0)] = |x(t-t_0)| \end{aligned}$$

Sia $y_{RIT}(t)$ l'uscita corrispondente a $x(t)$, traslata di t_0 -

Si ha:

$$y_{RIT}(t) \triangleq y(t-t_0) = x(t-t_0) \operatorname{sgn}[x(t-t_0)] = |x(t-t_0)|$$

Poiché risulta $y_R(t) = y_{RIT}(t)$ per $\forall x(t)$, t , t_0 il sistema è tempo invariante o stationario -

d) Siano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ due segnali generici e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ le corrispondenti uscite - si ha quindi:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = x_1(t) \operatorname{sgn}[x_1(t)] = |x_1(t)|$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = x_2(t) \operatorname{sgn}[x_2(t)] = |x_2(t)|$$

Sia $x_3(t)$ una qualunque combinazione lineare di $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e sia $y_3(t)$ la corrispondente uscita -
Si ha:

$$\begin{aligned} x_3(t) &\triangleq \alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = x_3(t) \cdot \text{sgn}[x_3(t)] = \\ &= [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \text{sgn}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \\ &= |\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)| \quad (1) \end{aligned}$$

Sia $y_c(t)$ la combinazione lineare di $y_1(t)$ e $y_2(t)$ eseguita con gli stessi coefficienti usati per $x_3(t)$. Si ha:

$$\begin{aligned} y_c(t) &\triangleq \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t) = \alpha \cdot x_1(t) \text{sgn}[x_1(t)] + \\ &+ \beta \cdot x_2(t) \text{sgn}[x_2(t)] = \alpha |x_1(t)| + \beta |x_2(t)| \quad (2) \end{aligned}$$

Poiché dal confronto delle espressioni (1) e (2) risulta che non è vero che $y_3(t) = y_c(t)$ per $\forall x_1(t), x_2(t), \alpha, \beta, t$ il sistema è non lineare -

e) Si osserva che (essendo $|\text{sgn}[x(t)]| = |\pm 1| = 1$):

$$|y(t)| = |x(t) \cdot \text{sgn}[x(t)]| = |x(t)| \cdot |\text{sgn}[x(t)]| = |x(t)|$$

Quindi il valore assoluto dell'uscita è quello dell'ingresso. Coincidono, come ovvio avendo osservato che $y(t) = |x(t)|$.

Quindi ad ogni ingresso limitato ($|x(t)| \leq M$) corrisponde un'uscita limitata ($|y(t)| \leq K = M$): il sistema è quindi stabile -