

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B69 21/07/14

Un sistema è costituito dal parallelo di due sistemi LTI aventi le seguenti risposte in frequenza:

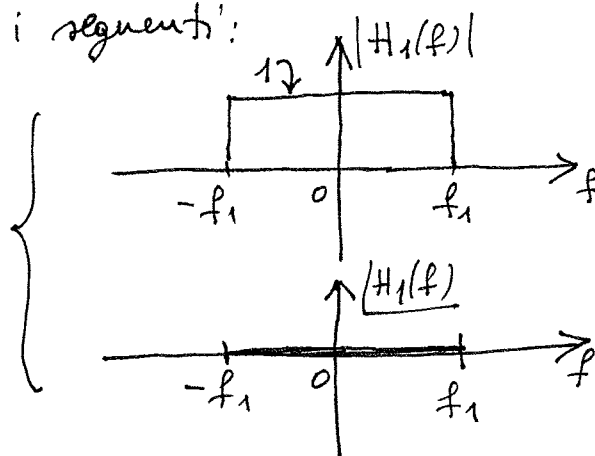
$$H_1(f) = \Pi(f/2f_1), \quad H_2(f) = \Pi(f/2f_2) e^{-j(\pi/2)\text{sgn}f} \quad \text{con } 0 < f_1 < f_2.$$

- Si traccino i diagrammi di modulo e argomento di $H_1(f)$ e $H_2(f)$.
- Si trovi l'espressione analitica della risposta in frequenza del sistema complessivo $H(f)$ esprimendola a tratti con parentesi graffa.
- Si taccino i diagrammi di modulo e fase di $H(f)$.
- Si trovi il segnale $x(t)$ in ingresso al sistema (globale) quando all'uscita si trova il segnale $y(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ assumendo $0 < f_0 < f_1$.

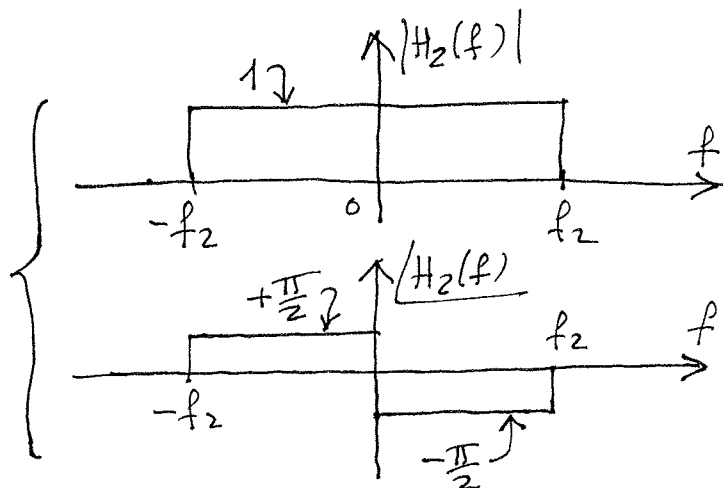
Quesito B69 (Soluzione)

a) I diagrammi richiesti sono i seguenti:

$$H_1(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_1}\right)$$



$$\begin{aligned} H_2(f) &= \Pi\left(\frac{f}{2f_2}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}\text{sgn}f} = \\ &= -j\text{sgn}f \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_2}\right) \end{aligned}$$



b) Essendo i due sistemi in parallelo si ha:

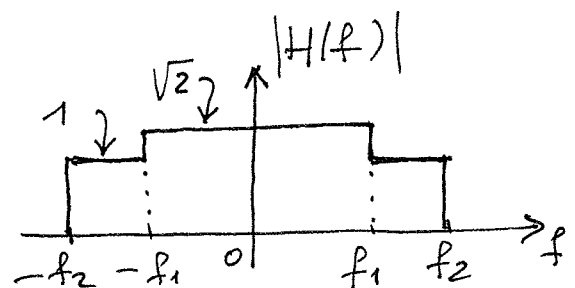
$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

quindi, ricordando che $e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j$, nei vari intervalli si ha:

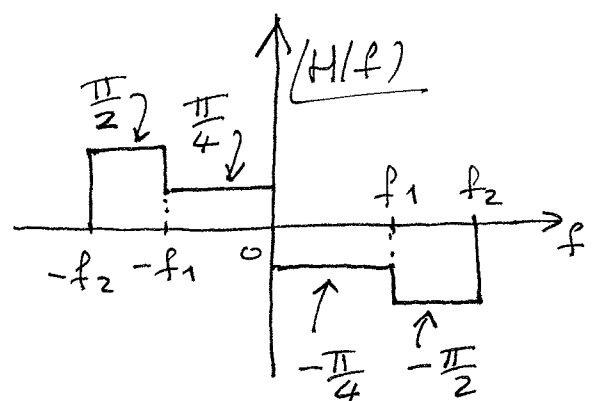
$$H(f) = \begin{cases} 0 & \text{per } f < -f_2 \\ 0 + e^{j\frac{\pi}{2}} = +j & \text{" } -f_2 < f < -f_1 \\ 1 + e^{j\frac{\pi}{2}} = 1+j & \text{" } -f_1 < f < 0 \\ 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}} = 1-j & \text{" } 0 < f < f_1 \\ 0 + e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j & \text{" } f_1 < f < f_2 \\ 0 & \text{" } f > f_2 \end{cases}$$

-c) Il modulo, la fase e i rispettivi diagrammi sono (negli stessi intervalli):

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 \\ |j| = 1 \\ |1+j| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ |1-j| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ |-j| = 1 \\ 0 \end{cases}$$



$$\angle H(f) = \begin{cases} 0 \\ \angle j = \frac{\pi}{2} \\ \angle 1+j = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \\ \angle 1-j = \arctan \frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4} \\ \angle -j = -\frac{\pi}{2} \\ 0 \end{cases}$$



d) se all'uscita del sistema si trova il segnale:

$$y(t) = \sin 2\pi f_0 t = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \leftarrow \text{sinusoide}$$

essendo il sistema LTI, all'ingresso si deve trovare una sinusoide della stessa frequenza ossia:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad \text{con } \underline{A \text{ e } \varphi \text{ da trovare.}}$$

È noto che con questo ingresso all'uscita si deve avere:

$$y(t) = A \cdot |H(f_0)| \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi + \underline{|H(f_0)|})$$

quindi confrontando questa espressione con l'uscita data e osservando che per $0 < f_0 < f_1$ è:

$$H(f) = 1 - j = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

deve essere:

$$A \cdot |H(f_0)| = A \cdot \sqrt{2} = 1 \quad \text{da cui: } A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\varphi + \underline{|H(f_0)|} = \varphi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \quad " \quad " \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

Quindi il segnale di ingresso cercato è:

$$\boxed{x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{4}\right)}$$