

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B78

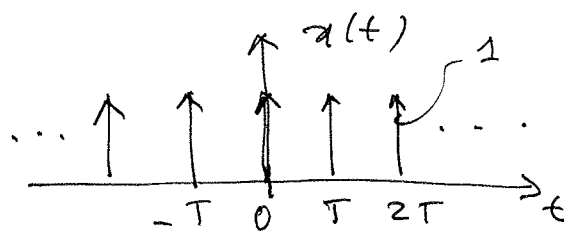
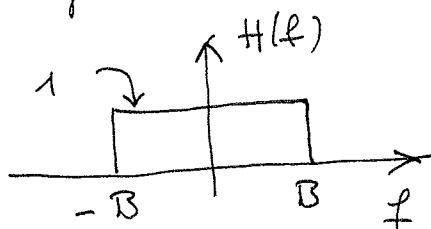
All'ingresso di un filtro passa basso ideale con risposta in frequenza $H(f) = \Pi(f/(2B))$ si trova il segnale:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

- a) Si traccino i diagrammi di $H(f)$ e di $x(t)$.
b) Si trovi il segnale $y(t)$ in uscita dal filtro nei casi $T_1 = 1/(2B)$ e $T_2 = 3/(2B)$ scrivendo in entrambi i casi, l'espressione analitica di $y(t)$ e della sua trasformata $Y(f)$ e tracciando i relativi diagrammi.

Quesito B78 (soluzione)

- a) I diagrammi della risposta in frequenza (reale)
 $H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$ e del segnale $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ sono i seguenti:



- b) Il segnale in uscita dal filtro, $y(t)$, si può trovare facilmente trovando prima la sua trasformata di Fourier con:

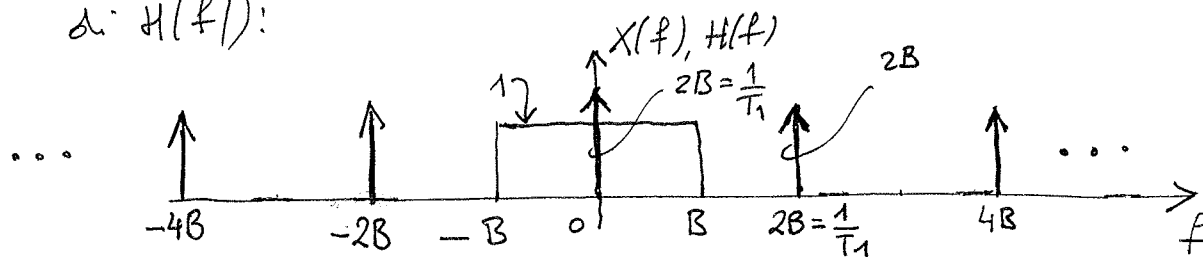
$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad \text{con} \quad X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$$

È noto che la trasformata di $x(t)$ (pettine di delta nel tempo) è un pettine di delta in frequenza -

Nel caso $\boxed{T_1 = \frac{1}{2B}}$ si ha:

$$X(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\right\} = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{1}{T_1}\right) = 2B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot 2B)$$

il cui grafico è il seguente (tracciato insieme a quello di $H(f)$):

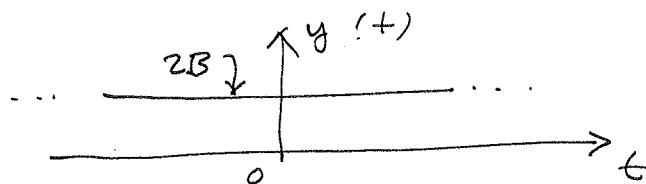


È facile osservare che lo spettro di uscita $Y(f)$ è:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = \frac{1}{T_1} \delta(f) = 2B \cdot \delta(f) \leftarrow \text{singola delta}$$

da cui il segnale di uscita è:

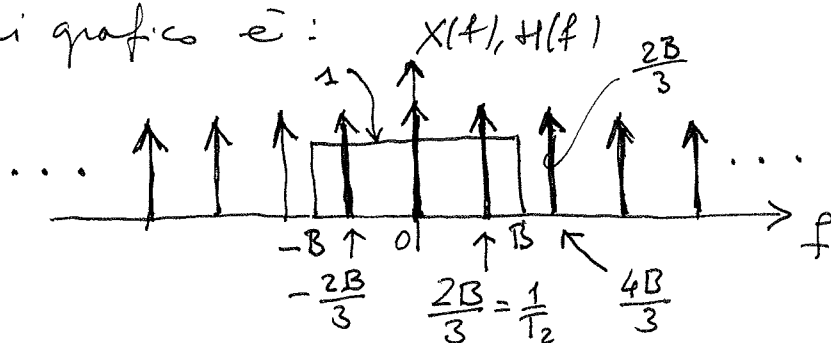
$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ 2B \delta(f) \} = 2B \leftarrow \text{costante}$$



Nel caso $T_2 = \frac{3}{2B}$ si ha:

$$X(f) = \frac{1}{T_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T_2}) = \frac{2B}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot \frac{2B}{3})$$

il cui grafico è:



In questo caso lo spettro di uscita è formato dalle sole tre delta non annullate da $H(f)$ ossia:

$$Y(f) = \frac{1}{T_2} \sum_{k=-1}^{+1} \delta(f - \frac{k}{T_2}) = \frac{1}{T_2} \left[\delta(f + \frac{1}{T_2}) + \delta(f) + \delta(f - \frac{1}{T_2}) \right]$$

la cui antitrasformata si può scrivere:

$$y(t) = \frac{1}{T_2} \left\{ \mathcal{F}^{-1} [\delta(f)] + \mathcal{F}^{-1} \left[\delta(f + \frac{1}{T_2}) + \delta(f - \frac{1}{T_2}) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{T_2} \left\{ 1 + 2 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T_2}\right) \right\} = \frac{2B}{3} \left\{ 1 + 2 \cdot \cos\left(2\pi \frac{2B}{3} t\right) \right\}$$

(segue)

il cui grafico è il seguente:

