

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B81

Un segnale $z(t)$ è ottenuto dalla convoluzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, ossia: $z(t) = x(t) * y(t)$.
Quale segnale si ottiene dalla convoluzione di $x(at)$ e $y(at)$, essendo a una costante? Si indichi tale segnale con $z_1(t)$ e lo si esprima in termini di $z(t)$.

Quesito B81 (Soluzione)

Si ha che:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau.$$

Ponendo $x_1(t) = x(at)$ e $y_1(t) = y(at)$ si ha:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_1(t) * y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) y_1(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(a\tau) y(a(t-\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a\tau) y(at-a\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ponendo $a\tau = \lambda \rightarrow d\tau = d\lambda / a$ si ha:

$$\boxed{z_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) y(at-\lambda) \frac{d\lambda}{a} = \frac{1}{a} z(at)}$$

che è la relazione cercata.

Si poteva anche passare attraverso il dominio della frequenza ricordando il teorema del cambiamento di scala:

$$z_1(t) = x(at) * y(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left[\frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) \right] \cdot \left[\frac{1}{a} Y\left(\frac{f}{a}\right) \right] \quad (1)$$

Ma essendo:

$$z(t) = x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \cdot Y(f) = Z(f)$$

e quindi:

$$z(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a} Z\left(\frac{f}{a}\right) = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) \cdot Y\left(\frac{f}{a}\right)$$

confrontando con la (1) si ottiene:

$$\boxed{z_1(t) = \frac{1}{a} z(at)}$$