Teoria dei Segnali – Concetti generali e definizioni

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Teoria dei Segnali – Concetti generali e definizioni – 18 ottobre 2010

Contenuto

Elaborazione dei segnali

L'elaborazione dei segnali è usata nei sistemi:

- di misura
- di controllo
- di comunicazione

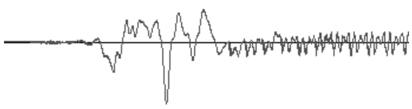
Storicamente, l'elaborazione dei segnali nasce con tecniche analogiche. Negli anni '80, l'avvento delle tecnologie VLSI (Very Large Scale Integration) diede la possibilità di integrare milioni di transistor su un singolo chip. Le capacità di calcolo sempre crescenti e i costi sempre più contenuti dei sistemi di elaborazione portarono rapidamente all'affermazione delle tecniche di elaborazione in forma digitale (numerica).

Segnali (1/2)

segnale := una funzione di una o più variabili, che contiene informazioni relative ad un fenomeno fisico.

Esempio:

- il suono (ad esempio, questo campione di segnale vocale) è un segnale monodimensionale (ampiezza in funzione del tempo t)



Segnali (2/2)

- un'immagine (ad esempio, la fotografia del gambero di torrente) è un segnale bidimensionale (luminosità e colore in funzione delle coordinate spaziali (x, y))

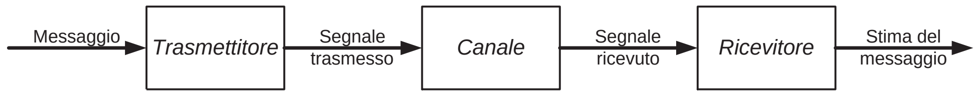
- una sequenza video (ad esempio, un filmato) è un segnale tridimensionale (luminosità e colore in funzione delle coordinate spaziali e del tempo (x, y, t))

Sistemi

sistema := un'entità che riceve in ingresso uno o più segnali, ed esegue una funzione che produce nuovi segnali in uscita.

$x(t)$: segnale in ingresso
$y(t)$: segnale in uscita

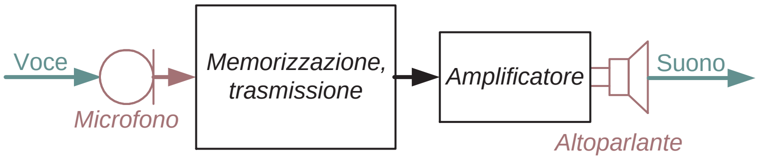
Esempio: sistema di telecomunicazione



Osservazione: se il canale di trasmissione fosse ideale, il segnale ricevuto sarebbe identico a quello trasmesso. Nella realtà, qualsiasi canale di trasmissione introduce **attenuazione**; inoltre possono esserci **disturbi** dovuti a **interferenze** di altre sorgenti di segnale e a **rumore**.

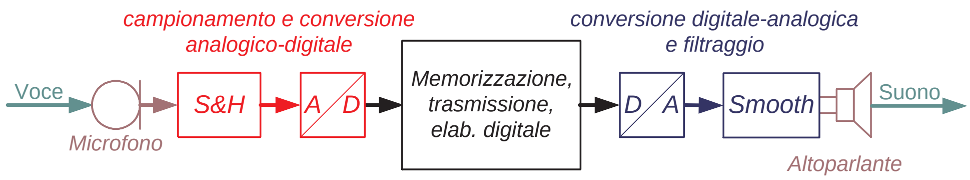
Il ricevitore deve ricostruire una **stima del messaggio**, in modo che siano minimizzati gli eventuali errori introdotti durante la trasmissione.

Elaborazione analogica di segnali audio



Il segnale trasmesso è una *trasposizione analogica* del suono: uno dei parametri varia in modo *analogo* all'ampiezza istantanea del segnale audio.

Elaborazione digitale di segnali audio



Il segnale viene campionato e convertito in una *sequenza di numeri*, che vengono codificati con *simboli*.

In generale, i segnali appartengono al mondo fisico e sono dovuti a fenomeni di tipo diverso. Ad esempio, il suono è dovuto alle variazioni della pressione dell'aria.
Un **sensore** traduce la grandezza fisica in un segnale elettrico, che viene **campionato** e **convertito** in formato **digitale**.
Al termine del processo di conversione, il segnale è stato trasformato in una **sequenza di numeri** che può essere elaborata, memorizzata o trasmessa.
Il processo inverso consiste nel **convertire** i numeri in una sequenza di impulsi elettrici, che viene **filtrata** in modo da renderla simile al segnale originale. Il segnale elettrico così ottenuto viene inviato ad un **trasduttore**, che lo converte in un segnale fisico (suono).

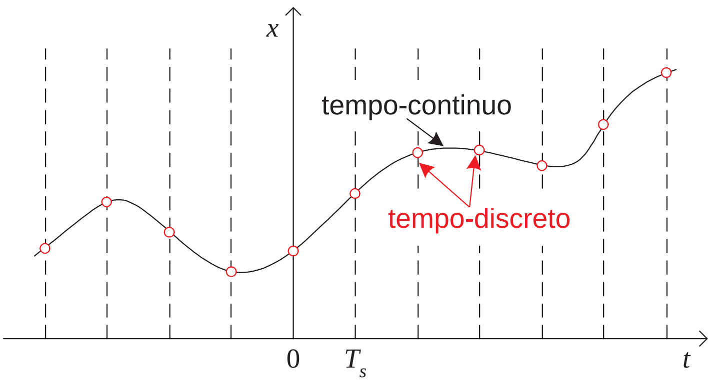
Classificazione dei segnali

I segnali possono essere:

- **tempo-continui** oppure **tempo-discreti**;
- con **ampiezza continua** oppure con **ampiezza discreta (quantizzati)**;
- **pari** oppure **dispari**;
- **periodici** oppure **non periodici**;
- **ad energia finita** oppure **a potenza finita**.

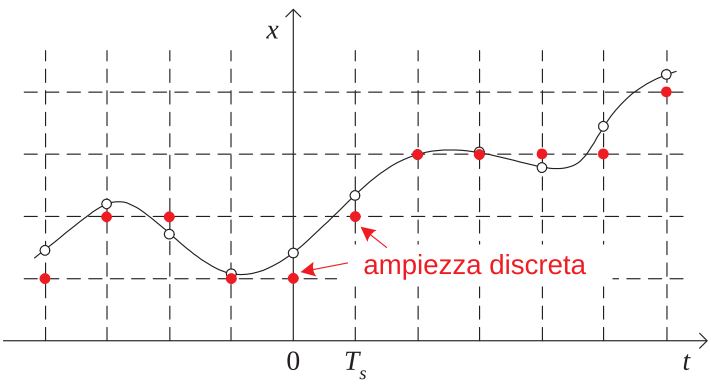
Segnali tempo-continui o tempo-discreti

Un segnale è **tempo-continuo** se assume un valore per ogni istante di tempo t; in altre parole, se $x(t)$ esiste per $\forall t$.
Un segnale è **tempo-discreto** se è definito solamente per alcuni valori di t, che di solito sono i multipli interi di un *periodo fondamentale* T_s: $x(t)$ esiste solo per $t = nT_s$, con $n \in \mathbb{Z}$. Indicheremo con $x[n]$ il valore del segnale nel multiplo n-esimo del periodo: $x[n] = x(nT_s)$.



Segnali con ampiezza continua o discreta

Un segnale ha **ampiezza continua** se $x(t)$ può assumere tutti i valori compresi in un determinato intervallo.
Un segnale ha **ampiezza discreta** o, in altre parole, è **quantizzato**, se $x(t)$ può assumere solo alcuni valori, appartenenti ad un insieme finito (o numerabile).



Segnali pari o dispari

Un segnale è **pari** se $x(-t) = x(t)$.

Un segnale è **dispari** se $x(-t) = -x(t)$.

Qualsiasi segnale reale $x(t)$ può essere scomposto nella somma di un termine pari $x_p(t)$ e un termine dispari $x_d(t)$:

$$x(t) = x_p(t) + x_d(t)$$

Esempio 1. In un polinomio $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$, i termini con esponente pari sono pari; mentre i termini con esponente dispari sono dispari:

$$x_p(t) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \cdots$$

$$x_d(t) = a_1 t + a_3 t^3 + a_5 t^5 + \cdots$$

Esempio 2. Il coseno è pari e il seno è dispari: è sufficiente notare che $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, oppure vedere gli sviluppi in serie di potenze.

Segnali periodici o non periodici

Un segnale $x(t)$ è **periodico** se esiste una costante T (detta **periodo**) tale che

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{per } \forall t$$

In pratica, dopo un intervallo di tempo T il segnale periodico si ripete identico a sé stesso.
Se un segnale è periodico con periodo T, allora

$$x(t + kT) = x(t) \quad \text{per } \forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{e per } \forall t.$$

Un segnale è **non periodico** se non esiste nessuna costante T per cui vale la precedente relazione.

Frequenza di un segnale periodico

L'inverso del periodo T è la **frequenza** f:

$$f = \frac{1}{T}$$

Dimensionalmente, la frequenza è l'inverso di un tempo e si misura in hertz (Hz).

Una sinusoide nel tempo è: $x(t) = \sin 2\pi ft = \sin \omega t$

Per un moto rotatorio, la frequenza f è legata alla **velocità angolare** ω dalla relazione: $\omega = 2\pi f$. La velocità angolare si misura in radianti al secondo (rad/s).
Poiché l'angolo giro è pari a 2π rad, risulta:
1 Hz = 1 giro/s = 2π rad/s.

Segnali ad energia finita

L'**energia** di un segnale $x(t)$ è:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

Osservazione: dimensionalmente, non si tratta di un energia espressa in joule, ma di un'*energia "normalizzata"*, la cui unità di misura dipende dall'unità di misura di x.

Un segnale $x(t)$ ha **energia finita** se

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

È evidente che *nessun segnale periodico ha energia finita*.

Segnali a potenza finita (1/2)

Per un segnale $x(t)$ periodico con periodo T, la **potenza media** (più precisamente, la *potenza normalizzata media*) è:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

L'integrale dà lo stesso risultato se è calcolato, invece che sull'intervallo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, su un qualsiasi intervallo avente durata pari ad un periodo T. Per questo motivo, si può scrivere anche:

$$P = \frac{1}{T} \int_{T} |x(t)|^2 \, dt$$

intendendo che l'integrale è calcolato su un qualsiasi intervallo temporale di durata T.

Segnali a potenza finita (2/2)

La definizione della potenza media può essere estesa a segnali non periodici, prendendo il limite:

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

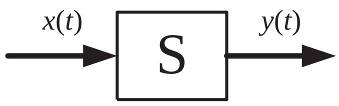
Per un segnale ad energia finita, la potenza media è nulla.

Un segnale $x(t)$ ha **potenza finita** se

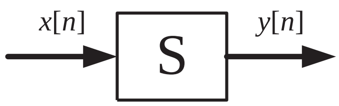
$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

Sistemi dinamici

Possiamo rappresentare graficamente un **sistema** come un blocco in cui entrano uno o più segnali (*ingresso*) e da cui escono uno o più segnali (*uscita*).

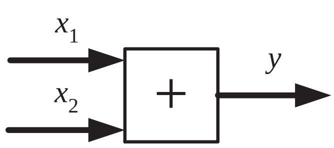


Sistema tempo-continuo: la variabile indipendente è t (tempo)

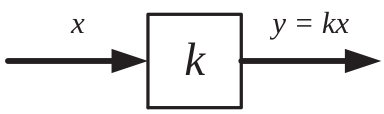


Sistema tempo-discreto: la variabile indipendente è n (numero progressivo del campione)

Casi particolari di sistemi (1/2)

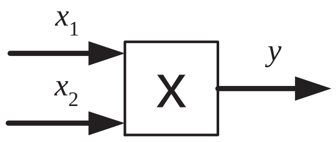


Somma di due segnali: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

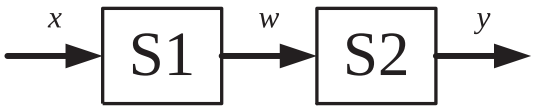


Moltiplicazione per una costante k: $y(t) = kx(t)$

Casi particolari di sistemi (2/2)



Prodotto di due segnali: $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$



Cascata di due sistemi S1 e S2

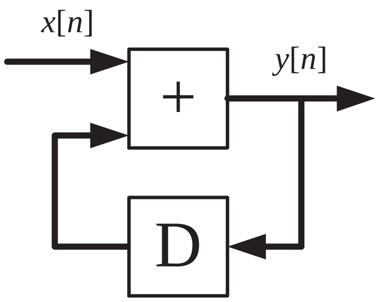
Sistemi con memoria; sistemi causali

Un sistema è **senza memoria** se l'uscita dipende solo dall'ingresso nello stesso istante: $y(t_0) = f(x(t_0))$ e non dipende da nessun $x(t)$ con $t \neq t_0$.

Un sistema è **con memoria** se l'uscita ad un certo istante dipende anche dall'ingresso in altri istanti: $y(t_0)$ dipende da qualche $x(t)$ con $t \neq t_0$.

Un sistema è **causale** se rispetta il principio causa-effetto, cioè se l'uscita ad un certo istante non dipende dai valori futuri dell'ingresso: $y(t_0)$ non dipende da $x(t)$ con $t > t_0$.
Tutti i sistemi fisicamente realizzabili sono causali.

Esempio: registro accumulatore



Il blocco "D" è un ritardo, la cui uscita è il valore precedente dell'ingresso: l'ingresso di D è $y[n]$, e l'uscita è $y[n-1]$.
L'uscita dell'accumulatore è $y[n] = y[n-1] + x[n]$, e quindi risulta:

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{n} x[i]$$

È un **sistema tempo-discreto causale con memoria**.

Sistemi lineari

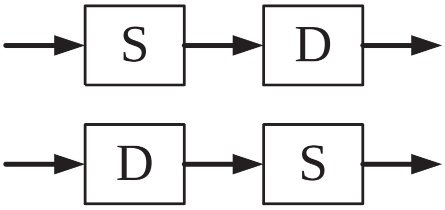
Un sistema è **lineare** quando l'uscita corrispondente ad una combinazione lineare di due valori di ingresso $x = \alpha x_1 + \beta x_2$ può essere espressa come combinazione lineare delle due uscite corrispondenti a ciascun ingresso preso separatamente: $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, dove y_1 è l'uscita prodotta da x_1, y_2 è l'uscita prodotta da x_2, α e β sono due costanti qualsiasi.

PER UN SISTEMA LINEARE VALE IL **PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI**

Nota: il prodotto $y = x_1 \cdot x_2$ NON è lineare, perché non è possibile calcolare separatamente i contributi di x_1 (ponendo $x_2 = 0$) e di x_2 (ponendo $x_1 = 0$).

Sistemi tempo-invarianti

Un sistema è **tempo-invariante** quando l'ingresso ritardato o anticipato di un tempo τ qualsiasi produce la stessa uscita ritardata o anticipata dello stesso tempo τ: se $y(t)$ è l'uscita corrispondente a $x(t)$, allora $y(t-\tau)$ è l'uscita corrispondente a $x(t-\tau)$, per $\forall\tau$.



Se il sistema S è tempo-invariante, la cascata sistema+ritardo è equivalente alla cascata ritardo+sistema; in caso contrario no.

Stabilità "BIBO"

Un sistema è **stabile nel senso BIBO ("bounded-input bounded-output")** quando qualsiasi ingresso limitato in ampiezza produce un'uscita limitata in ampiezza: se $|x(t)| \leq M_1$, allora $\exists M_2$ (che dipende da M_1) per cui $|y(t)| \leq M_2$.

Nota: questa non è l'unica definizione di stabilità; ne esistono anche altre, che NON sono equivalenti a questa.

Invertibilità

Un sistema è **invertibile** quando, conoscendone l'uscita $y(t)$, è sempre possibile ricavare in modo univoco l'ingresso $x(t)$.

Esempi:

- la moltiplicazione per una costante $y(t) = kx(t)$ è invertibile, e la sua inversa è $x(t) = \frac{y(t)}{k}$;
- l'elevamento al quadrato $y(t) = (x(t))^2$ NON è invertibile se l'ingresso $x(t)$ ha segno ($+$ o $-$), perché non è possibile determinare univocamente $x(t)$.