# Teoria dei Segnali –
# Richiami di analisi matematica; alcune funzioni notevoli

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

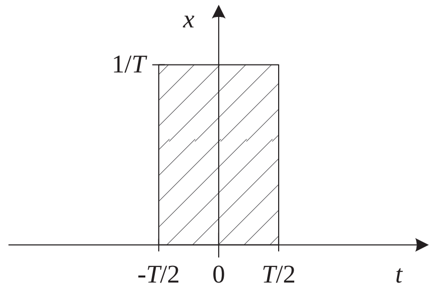
Teoria dei Segnali – Richiami di analisi matematica – 18 ottobre 2010



## Contenuto

## Funzione rettangolo

$$x(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\frac{t}{T} = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$




L'area sottesa dal grafico della funzione è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt = \frac{1}{T}\ T = 1$$



## Delta di Dirac (1/3)

La funzione $x(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\frac{t}{T}$ è diversa da zero solo nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Se facciamo diminuire $T$ mantenendo invariata l'area del rettangolo, aumenta l'altezza; per $T \to 0$, il rettangolo tende a coincidere con l'asse verticale, mantenendo un'area unitaria.

La **Funzione delta di Dirac** $\delta(t)$ è il limite della funzione rettangolo per $T \to 0$:

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\frac{t}{T}$$

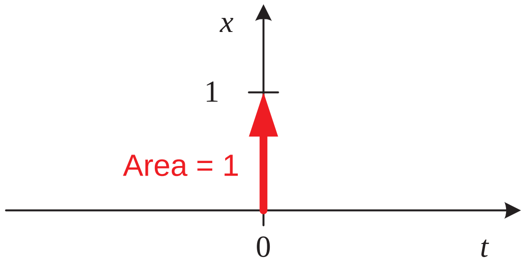
La funzione delta di Dirac $\delta(t)$ non è una funzione in senso classico, perché pur essendo nulla per ogni $t \neq 0$, il suo integrale vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\ dt = 1$$

La trattazione esatta della $\delta(t)$ rientra nella *teoria delle distribuzioni* (che sono una "generalizzazione" del concetto matematico di funzione).

## Delta di Dirac (2/3)

Rappresentazione della funzione $\delta(t)$:




La $\delta(t)$ si rappresenta come un **impulso** di durata nulla e ampiezza pari all'area:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$



## Delta di Dirac (3/3)

La funzione delta di Dirac $\delta(t)$ dimensionalmente è l'inverso di un tempo, come si può osservare dalla definizione:

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \operatorname{rect} \frac{t}{T}$$

La delta di Dirac è **pari**, perché rappresenta il limite per $T \to 0$ della funzione rettangolo, che è pari.

## Delta di Dirac e campionamento

Una proprietà importante della delta di Dirac è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\ dt = x(0)$$

Più in generale, se la delta di Dirac è *traslata* in $t_0$, risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)\ dt = x(t_0)$$

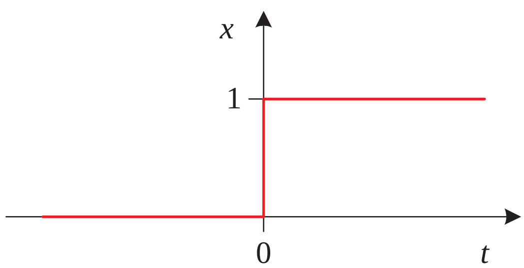
La funzione $\delta(t)$, traslata in $t_0$, moltiplicata per una qualsiasi funzione $x(t)$ e integrata da $-\infty$ a $+\infty$, estrae il valore che la $x(t)$ assume per $t = t_0$.
Per questo motivo, la delta di Dirac è importante nella teoria del *campionamento*.



## Gradino di Heaviside (1/2)

L'integrale tra $-\infty$ e $t$ della delta di Dirac è la funzione **gradino unitario di Heaviside**:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & \text{per } t < 0 \\ 1, & \text{per } t > 0 \end{cases}$$



## Gradino di Heaviside (2/2)

Viceversa, la delta di Dirac è la derivata del gradino:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

La teoria delle distribuzioni permette di esprimere matematicamente le derivate di funzioni discontinue.



## Funzioni di due o più variabili

Spesso, nell'analisi dei segnali, bisogna utilizzare funzioni di due (o più di due) variabili.
Una funzione di due variabili può essere scritta simbolicamente come $z(x, y)$: $x$ e $y$ sono le due variabili indipendenti, mentre il valore della variabile dipendente $z$ è determinato in base ai valori di $x$ e di $y$.

Il grafico della funzione $z(x, y)$ è una superficie nello spazio a tre dimensioni $xyz$.

## Derivate parziali (1/4)

Data una funzione di due variabili $z(x, y)$, le sue **derivate parziali**

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

si calcolano derivando la funzione $z(x, y)$ rispetto ad **una sola** delle due variabili, e trattando l'altra variabile come una costante.
*Nota:* il simbolo della derivata parziale $\partial$ è una "d storta", simile alla lettera ð ("eth") dell'alfabeto islandese, ma scritta in corsivo e senza il taglietto.

La derivata parziale $\frac{\partial z}{\partial x}$ è la derivata nella direzione dell'asse $x$ e geometricamente rappresenta la pendenza della superficie $z(x, y)$ nella direzione $x$.



## Derivate parziali (2/4)

*Esempi:*

- $z(x, y) = x + x^2 y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

- $z(x, y) = \sin(x + \cos y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + \cos y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin y \cdot \cos(x + \cos y)$$

## Derivate parziali (3/4)

Le **derivate parziali seconde** della funzione $z(x, y)$ sono:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

*Osservazione:* quando una funzione deve essere derivata più volte, le derivate si eseguono nell'ordine da destra a sinistra:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Se le derivate miste $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ sono continue, allora:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$



## Derivate parziali (4/4)

*Esempio:* $z(x, y) = x + x^2 y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x$$

## Gradiente

Nel caso di una funzione di due variabili $z(x, y)$, l'estensione del concetto di derivata prima non è data della derivate parziali prese separatamente, ma è data dal vettore **gradiente** $\nabla z$:

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{u}_y$$

dove $\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{u}_y$ sono i versori (vettori unitari) diretti come gli assi $x$ e $y$.

*Il gradiente di una funzione è il vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione.*



## Matrice hessiana (1/2)

Per una funzione di due variabili $z(x, y)$, l'estensione del concetto di derivata seconda è data dalla **matrice hessiana H**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

che ha come elementi le derivate parziali seconde.

Se le derivate seconde miste sono continue, allora $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ e la matrice hessiana è **simmetrica**.

## Matrice hessiana (2/2)

Il determinante della matrice hessiana $\det(\mathbf{H})$ dà la *curvatura* della superficie $z(x, y)$:

- se $\det(\mathbf{H}) > 0$, la superficie ha curvatura *positiva* (esempi: sfera, ellissoide, paraboloide di rotazione)
- se $\det(\mathbf{H}) < 0$, la superficie ha curvatura *negativa* (esempio: sella)
- se $\det(\mathbf{H}) = 0$, la superficie ha curvatura *nulla* (esempi: cilindro, cono)

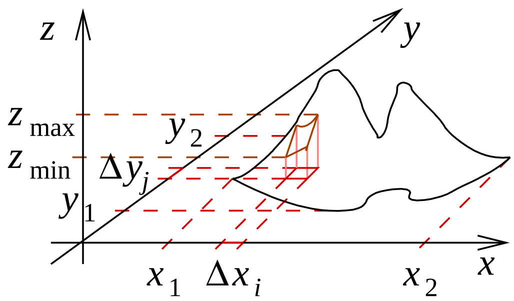
Nei punti di massimo e minimo della funzione $z(x, y)$, il gradiente è nullo e la curvatura è positiva; in un punto di massimo $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, mentre in un punto di minimo $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$.

*Nel seguito, NON useremo gradiente e matrice hessiana.*

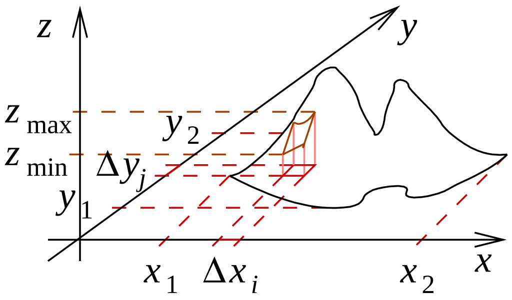


## Integrali doppi (1/5)

Supponiamo di voler calcolare il volume della parte emersa di un'isola, la cui superficie è rappresentata da $z(x, y)$ dove $x$ e $y$ sono le coordinate geografiche, e $z$ è la quota (assumiamo $z = 0$ dove c'è il mare).



## Integrali doppi (2/5)

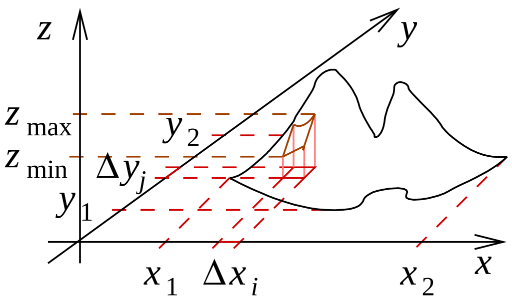



Se gli estremi geografici dell'isola sono $(x_1, x_2)$ e $(y_1, y_2)$, il volume $V$ è dato dall'integrale doppio:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z(x, y)\ dx\ dy$$



## Integrali doppi (3/5)




Suddividiamo l'intervallo $(x_1, x_2)$ in sottointervalli $\Delta x_i$ e l'intervallo $(y_1, y_2)$ in sottointervalli $\Delta y_j$. Ogni coppia $(\Delta x_i, \Delta y_j)$ individua una parte della superficie dell'isola, in cui $z_{\text{min}}$ è la quota minima e $z_{\text{max}}$ è la quota massima.
Il volume dell'isola, $V$, risulta compreso tra i due valori:

$$\sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j z_{\text{min},ij} \leq V \leq \sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j z_{\text{max},ij}$$

## Integrali doppi (4/5)

Se, facendo tendere a zero la lunghezza dei sottointervalli $\Delta x_i$ e $\Delta y_j$, le due sommatorie che approssimano il volume tendono allo stesso valore, allora questo è anche il valore dell'integrale doppio:

$$\lim_{\Delta x_i, \Delta y_j \to 0} \sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j z_{\text{min},ij} = \lim_{\Delta x_i, \Delta y_j \to 0} \sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j z_{\text{max},ij} =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z(x,y)\ dx\ dy$$



## Integrali doppi (5/5)

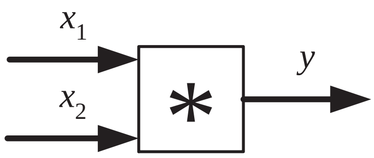
Nella pratica, il calcolo dell'integrale doppio può essere ricondotto al calcolo di due integrali semplici.
Infatti, se esistono gli integrali semplici

$$\int_{x_1}^{x_2} z(x,y)\ dx \quad \text{e} \quad \int_{y_1}^{y_2} z(x,y)\ dy,$$

allora risulta:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z(x,y)\ dx\ dy = \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} z(x,y)\ dx \right) dy =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1}^{y_2} z(x,y)\ dy \right) dx$$

# Convoluzione (1/3)



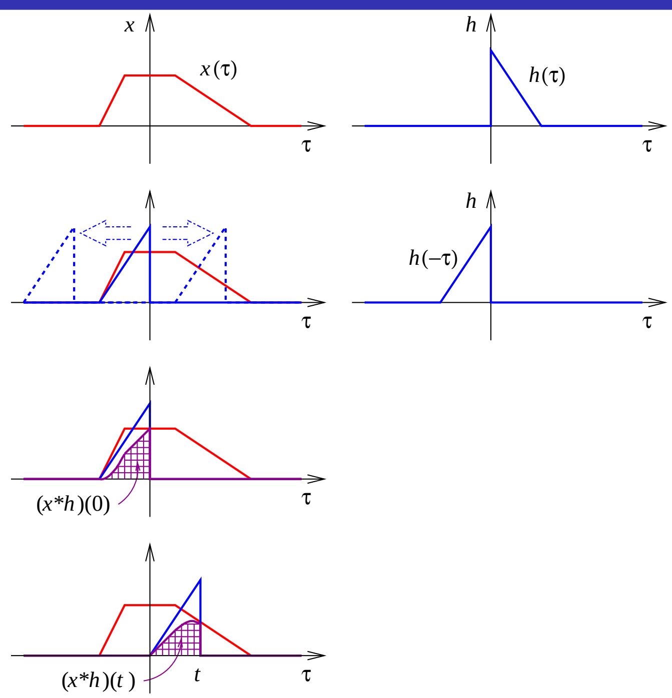

La convoluzione di due segnali è definita come:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau)\, d\tau$$

La convoluzione è commutativa.



# Convoluzione (2/3)



## Convoluzione (3/3)

Per avere una interpretazione geometrica della convoluzione, si può procedere in questo modo:

- si capovolge l'asse dei tempi della seconda funzione (nell'esempio, $h$)
- si sovrappone la seconda funzione capovolta alla prima ($x$); l'integrale del prodotto è il valore della convoluzione per $t = 0$
- si trasla la seconda funzione capovolta di un tempo $t$; l'integrale del prodotto è il valore della convoluzione in $t$
- ripetendo l'operazione per tutti i possibili valori di $t$ si ha la funzione $(x * h)(t)$



## Delta di Dirac e convoluzione

Facendo la convoluzione tra una funzione $x(t)$ e la delta di Dirac, si ha:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau)\, d\tau =$$

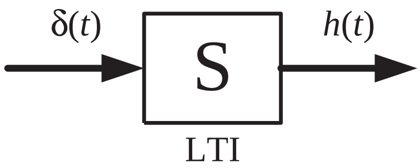
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - t)\, d\tau = x(t)$$

La delta di Dirac è pari, quindi $\delta(t - \tau) = \delta(\tau - t)$; inoltre nell'ultimo passaggio è stato usato il risultato del campionamento (con $\tau$ al posto di $t$, e $t$ al posto di $t_0$).

Da questo risultato, si vede che la delta di Dirac è l'elemento neutro per l'operazione di convoluzione.

## Sistemi LTI (1/2)

I sistemi lineari tempo-invarianti (LTI) costituiscono una categoria molto importante di sistemi presi in esame; vi appartengono i **filtri** a coefficienti costanti.
Un sistema **lineare tempo-invariante** è **completamente specificato dalla sua risposta impulsiva** $h(t)$, cioè dall'uscita che si ha quando all'ingresso è applicata una delta di Dirac $\delta(t)$.



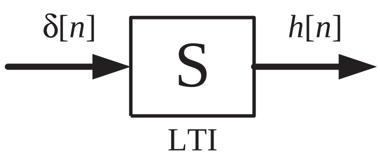

Per un sistema LTI avente risposta impulsiva $h(t)$, l'uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso $x(t)$ è:

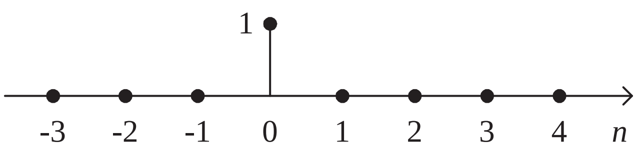
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau)\, d\tau$$



## Sistemi LTI (2/2)

Sistema **tempo-discreto lineare tempo-invariante**:




$\delta[n]$: delta di Dirac tempo-discreto

L'uscita corrispondente all'ingresso $x[n]$ è:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i] \cdot h[n - i]$$

## Sistemi LTI causali

Un sistema tempo-continuo LTI è **causale** quando $h(t) = 0$ per $\forall t < 0$.
L'uscita è data dall'integrale di convoluzione:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

in cui $h(t-\tau) = 0$ per $t - \tau < 0$, cioè per $\tau > t$. Quindi per $\tau > t$ il contributo all'integrale di convoluzione è zero, e

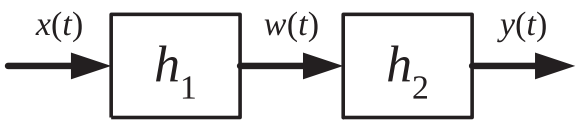
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

In modo analogo, un sistema tempo-discreto LTI è **causale** quando $h[n] = 0$ per $\forall n < 0$.
L'uscita è:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{i=-\infty}^{n} x[i] \cdot h[n-i]$$



## Cascata di due sistemi LTI




$$w(t) = x(t) * h_1(t)$$

$$y(t) = w(t) * h_2(t) = x(t) * \underbrace{h_1(t) * h_2(t)}$$

La cascata di due sistemi LTI è equivalente ad un solo sistema LTI con risposta impulsiva

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

e siccome l'operazione di convoluzione è commutativa, la cascata di $h_1$ e $h_2$ è equivalente alla cascata di $h_2$ e $h_1$.