Teoria dei Segnali – Richiami ai numeri complessi; serie e trasformata di Fourier

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Teoria dei Segnali – Serie e trasformata di Fourier – 26 ottobre 2010

Contenuto

Numeri complessi (1/2)

Unità immaginaria: $j = \sqrt{-1}$.
Così come l'equazione $x^2 - 1 = 0$ ha le due soluzioni $x = 1$ e $x = -1$, usando l'unità immaginaria j l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha le due soluzioni $x = j$ e $x = -j$.

Potenze dell'unità immaginaria:

$$\ldots, \quad j^{-1} = -j, \quad j^0 = 1, \quad j^1 = j, \quad j^2 = -1, \quad j^3 = -j, \quad j^4 = 1, \quad \ldots$$

Le potenze del numero j sono *cicliche*.

Nota: Nei testi di matematica e fisica l'unità immaginaria è indicata con i. Nei settori delle scienze e tecnologie dell'informazione, invece, l'unità immaginaria è indicata con j perché il simbolo i indica l'intensità di corrente elettrica.

Numeri complessi (2/2)

Numero complesso: è un numero che può essere scritto nella forma $z = x + jy$ dove x e y sono numeri reali.
L'insieme dei numeri complessi è un campo, che si indica con $\mathbb{C}$, in cui valgono tutte le proprietà delle operazioni con i numeri reali.

Esempi:

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

$$(a + jb) \cdot (c + jd) = ac + jad + jbc + j^2bd = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'uguaglianza $j^2 = -1$.

Numeri complessi coniugati

Il **coniugato** del numero complesso $z = x + jy$ è il numero z^*:

$$z^* = x - jy$$

La somma e il prodotto di due numeri complessi coniugati danno come risultato numeri reali.

Infatti risulta:

$$z + z^* = (x + jy) + (x - jy) = x + x + j(y - y) = 2x$$

e

$$z \cdot z^* = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 + jxy - jxy - j^2y^2 = x^2 + y^2$$

Radici di un'equazione algebrica

Nel campo complesso, una equazione algebrica di grado n

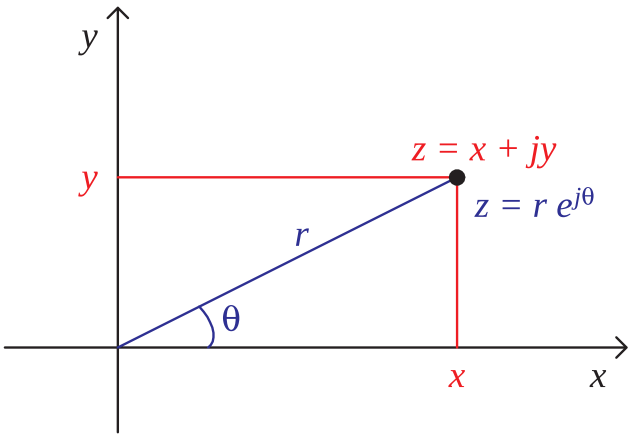
$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

ha sempre n radici, che possono essere reali oppure complesse coniugate (a coppie).
Nel conteggio del numero delle radici, occorre tenere conto della *molteplicità* di ciascuna radice.

Esempio: l'equazione $z^4 + z^2 = 0$ può essere riscritta come $z \cdot z \cdot (z^2 + 1) = 0$. Si nota subito che le sue quattro radici sono: $z = 0$ con molteplicità due (perché il fattore z compare due volte), e $z = \pm j$ (coppia di radici coniugate).

Piano di Argand

Poiché ogni numero complesso $z = x + jy$ corrisponde ad una coppia di numeri reali (x, y), i numeri complessi possono essere rappresentati su un piano (*piano di Argand*).



Forma polare (1/2)

La **forma polare di un numero complesso** è la rappresentazione del numero z in **coordinate polari**:

$$z = r\ e^{j\vartheta}$$

con

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\vartheta = \arctan \frac{y}{x}$$

- r è il *modulo*
- ϑ è la *fase* (o *sfasamento*)

Forma polare (2/2)

Nella formula dello sfasamento $\vartheta = \arctan \frac{y}{x}$, la funzione arcotangente deve essere intesa a quattro quadranti:

$$
\begin{aligned}
-\pi < \vartheta \leq -\frac{\pi}{2} \quad & \text{per} \quad x \leq 0, y < 0 \quad & \text{(III quadrante)} \\
-\frac{\pi}{2} < \vartheta \leq 0 \quad & \text{per} \quad x > 0, y \leq 0 \quad & \text{(IV quadrante)} \\
0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \quad & \text{per} \quad x \geq 0, y > 0 \quad & \text{(I quadrante)} \\
\frac{\pi}{2} < \vartheta \leq \pi \quad & \text{per} \quad x < 0, y \geq 0 \quad & \text{(II quadrante)}
\end{aligned}
$$

Ovviamente, $\arctan \frac{0}{0}$ è indeterminato.
Questa definizione dell'arcotangente corrisponde alla funzione `atan2(y, x)` del linguaggio C.

Relazioni tra esponenziale, seno, e coseno

Con i numeri complessi si può scrivere la funzione esponenziale come combinazione delle funzioni seno e coseno, e viceversa, mediante le **formule di Eulero**:

$$
\begin{aligned}
e^{j\vartheta} &= \cos\vartheta + j\sin\vartheta \\
\cos\vartheta &= \frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2} \\
\sin\vartheta &= \frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j}
\end{aligned}
$$

Osservazione: Nel campo complesso la funzione esponenziale è **periodica** con periodo $j2\pi$.

Serie di Fourier (1/2)

Ogni segnale $x(t)$ periodico con periodo $T = \frac{1}{f_0}$ può essere espresso come **serie di Fourier**:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi f_0 t + b_k \sin 2k\pi f_0 t)$$

dove

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos 2k\pi f_0 t \; dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin 2k\pi f_0 t \; dt$$

I termini a_k e b_k sono i **coefficienti di Fourier**.

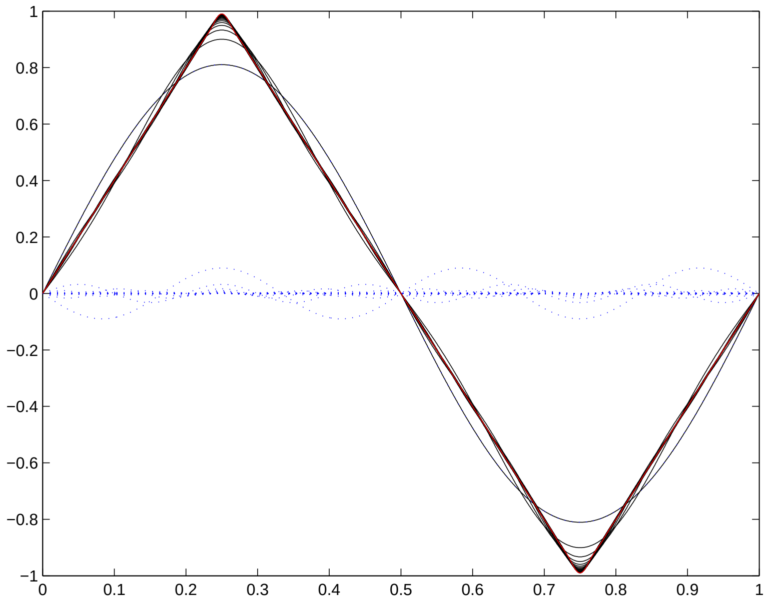
Serie di Fourier (2/2)

La serie di Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi f_0 t + b_k \sin 2k\pi f_0 t)$$

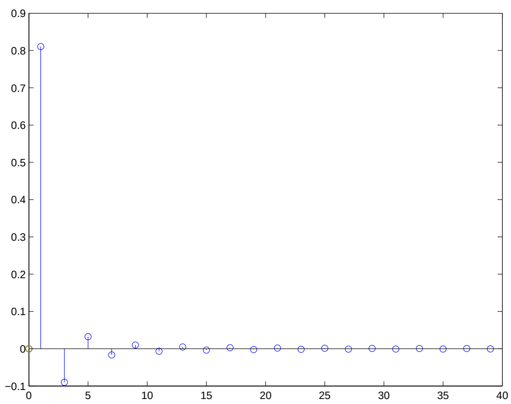
permette di esprimere una funzione periodica attraverso un numero discreto di parametri, che sono le ampiezze delle componenti sinusoidali (b_k) e cosinusoidali (a_k) alle frequenze multiple di f_0.

Esempio: onda triangolare



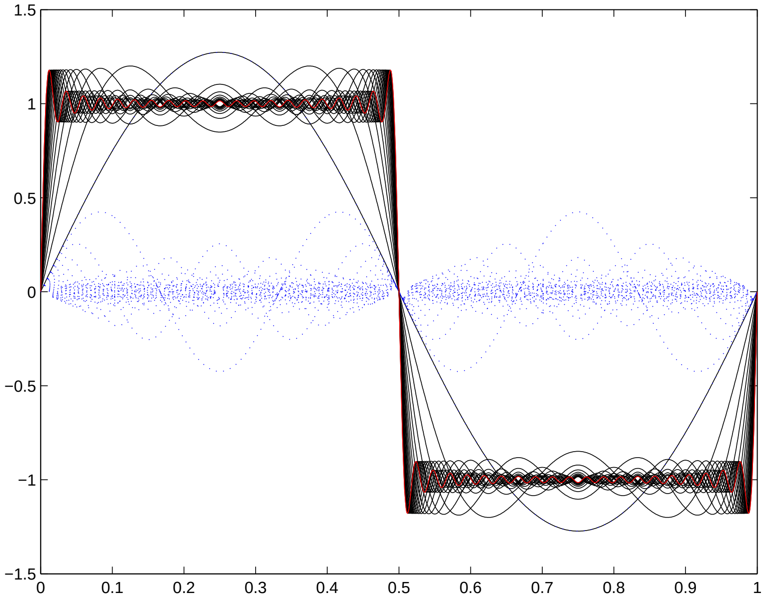
Serie di Fourier per l'onda triangolare

Coefficienti di Fourier b_k (parte sinusoidale):



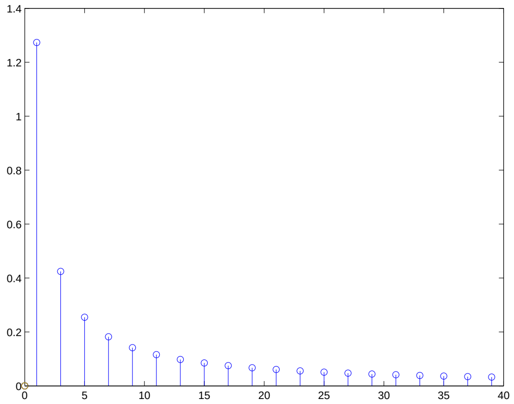
I coefficienti tendono rapidamente a zero all'aumentare di k
$\longrightarrow$ bastano pochi coefficienti per avere una buona approssimazione.

Effetto Gibbs per l'onda quadra



Serie di Fourier per l'onda quadra

Coefficienti di Fourier b_k (parte sinusoidale):



I coefficienti tendono a zero più lentamente al crescere di k.
Nell'intorno della discontinuità, qualsiasi approssimazione presenta una sovraelongazione che NON tende a zero (*effetto Gibbs*).

Serie di Fourier in forma complessa

Usando gli esponenziali complessi al posto di seno e coseno, la serie di Fourier diventa:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \; e^{j2k\pi f_0 t}$$

dove

$$c_k = c^*_{-k} = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \; e^{-j2k\pi f_0 t} \; dt$$

I c_k sono i **coefficienti di Fourier** in forma complessa: $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, mentre $c_k \in \mathbb{C}$.

Combinazioni di funzioni periodiche

La serie di Fourier è definita solo per segnali periodici.
La somma di due funzioni periodiche può essere non periodica: ad esempio quando si sommano due sinusoidi aventi frequenze il cui rapporto non è un numero razionale.

$$x(t) = \sin 2\pi ft + \sin \sqrt{2}\pi ft$$

non è periodica pur essendo una combinazione lineare di funzioni periodiche (si dice che $x(t)$ è *2-periodica*).

Non sempre si può scrivere sotto forma di serie di Fourier la funzione ottenuta dalla somma di due serie di Fourier: si può fare solo se il segnale risultante è periodico (cioè esiste il minimo comune multiplo dei periodi dei due segnali che si sommano).

Trasformata di Fourier (1/4)

Un segnale non periodico può essere considerato come un segnale periodico avente $T \rightarrow \infty$, e di conseguenza $f_0 \rightarrow 0$.
La serie di Fourier può essere generalizzata al caso non periodico, sostituendo la sommatoria con l'integrale.
Trasformata di Fourier:

$$X(f) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

Antitrasformata di Fourier:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$$

(la formula della trasformata assomiglia al coefficiente della serie di Fourier in forma complessa, con f al posto di kf_0)

Trasformata di Fourier (2/4)

Le definizioni di trasformata e antitrasformata di Fourier sono valide per tutti quei segnali per cui l'integrale al secondo membro esiste.

$$X(f) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$$

Se $x(t)$ è una funzione del tempo t, allora $X(f)$ è una funzione della frequenza f.

$\mathcal{F}$ è l'operatore che trasforma $x(t)$ in $X(f)$: $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$
$\mathcal{F}^{-1}$ è l'operatore inverso (antitrasformata): $X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t)$.

Trasformata di Fourier (3/4)

Le due formule per la trasformata e l'antitrasformata di Fourier coincidono, tranne che per il segno nell'esponenziale e per la variabile d'integrazione.
Quindi l'antitrasformata di Fourier ha le stesse proprietà della trasformata di Fourier; inoltre, ad una funzione corrisponde una sola trasformata di Fourier e viceversa (tranne che nel caso di funzioni discontinue che assumono valori diversi solo in "pochi" punti).
Per questi motivi, si parla di **coppie di trasformate**, e si scrive:

$$x(t) \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} X(f)$$

o anche, più semplicemente, $x(t) \longleftrightarrow X(f)$

Trasformata di Fourier (4/4)

Nota: in alcuni libri la trasformata di Fourier è definita come l'operatore che trasforma una funzione del tempo t in una funzione della *velocità angolare* $\omega = 2\pi f$:

$$X(\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j\omega t}\ dt$$

L'antitrasformata corrispondente è:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\ e^{j\omega t}\ d\omega$$

Nel seguito, useremo solamente la trasformata di Fourier nel dominio della frequenza f.

Linearità della trasformata di Fourier

Nel seguito, si suppone che $x(t)$ e $X(f)$ siano una coppia di trasformate di Fourier:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

La trasformata di Fourier è un operatore lineare, in quanto la trasformata di una somma è la somma delle trasformate:

$$x_1(t) + x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) + X_2(f)$$

e alla moltiplicazione per una costante k nel dominio t corrisponde la moltiplicazione per k nel dominio f:

$$kx(t) \longleftrightarrow kX(f)$$

(questa proprietà deriva dalla linearità dell'integrale)

Cambio di scala e traslazione nel tempo

Cambio di scala: ad una contrazione dell'asse dei tempi corrisponde una dilatazione dell'asse delle frequenze, e viceversa:

$$x(kt) \longleftrightarrow \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right)$$

Traslazione nel tempo: ad un segnale ritardato nel tempo di t_0 corrisponde, nel dominio della frequenza, una trasformata moltiplicata per $e^{-j2\pi f t_0}$:

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

Traslazione in frequenza (modulazione)

La moltiplicazione per una sinusoide nel dominio del tempo ($e^{-j2\pi f_0 t}$) corrisponde ad una traslazione nel dominio delle frequenze:

$$e^{-j2\pi f_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(f + f_0)$$

Questa proprietà è il fondamento matematico della *modulazione di ampiezza* nella trasmissione radio analogica.

Moltiplicazione e convoluzione

Alla moltiplicazione di due segnali nel dominio del tempo corrisponde la convoluzione nel dominio delle frequenze, e viceversa:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f)$$

La *convoluzione* tra due segnali è definita come:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau)\, d\tau$$

Derivazione e integrazione

La trasformata di Fourier della derivata di un segnale rispetto al tempo è la trasformata del segnale moltiplicata per $j2\pi f$.

Derivazione:

$$x'(t) \longleftrightarrow j2\pi f X(f)$$

La trasformata di Fourier dell'integrale di un segnale rispetto al tempo è la trasformata del segnale divisa per $j2\pi f$.

Integrazione:

$$\int x(t)\; dt \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$