Teoria dei Segnali – Proprietà della trasformata di Fourier; correlazione tra segnali; autocorrelazione

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Teoria dei Segnali – Proprietà della FT; correlazione – 8 novembre 2010

Contenuto

Proprietà della trasformata di Fourier (1/2)

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

Linearità:

$$x_1(t) + x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) + X_2(f)$$
$$kx(t) \longleftrightarrow kX(f)$$

Cambio di scala:

$$x(kt) \longleftrightarrow \frac{1}{k}\, X\left(\frac{f}{k}\right)$$

Traslazione nel tempo:

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

Proprietà della trasformata di Fourier (2/2)

Traslazione in frequenza (modulazione):

$$e^{-j2\pi f_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(f + f_0)$$

Moltiplicazione e convoluzione:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f)$$

Derivazione:

$$x'(t) \longleftrightarrow j2\pi f \cdot X(f)$$

Integrazione:

$$\int x(t)\, dt \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f)$$

Altre proprietà (1/6)

- La trasformata di Fourier di una funzione reale e pari è reale e pari.
- La trasformata di Fourier di una funzione reale e dispari è immaginaria e dispari.

Infatti, poiché qualsiasi funzione reale $x(t)$ è la somma di un termine pari $x_p(t)$ e di un termine dispari $x_d(t)$, la trasformata di Fourier risulta:

$$\mathcal{F}\left(x_p(t) + x_d(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_p(t) + x_d(t)\right) e^{-j2\pi ft}\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_p(t) + x_d(t)\right) \cdot \left(\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft\right)\ dt$$

Altre proprietà (2/6)

Svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(x_p(t) + x_d(t)\right) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t) \cos 2\pi ft\ dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_d(t) \cos 2\pi ft\ dt + \\ &- j \int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t) \sin 2\pi ft\ dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x_d(t) \sin 2\pi ft\ dt\end{aligned}$$

Ma $\int_{-\infty}^{+\infty} x_d(t) \cos 2\pi ft\ dt = 0$, perché $x_d(t) \cos 2\pi ft$ è una funzione dispari del tempo t, e quindi l'integrale calcolato in un intervallo *simmetrico* attorno allo zero dà zero:

$$\int_{-T}^{+T} x_d(t) \cos 2\pi ft\ dt = 0 \quad \text{per} \quad \forall T$$

Altre proprietà (3/6)

Analogamente, $\int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t) \sin 2\pi f t \; dt = 0$.
Risulta:

$$\mathcal{F}\left(x_p(t) + x_d(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t) \cos 2\pi f t \; dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x_d(t) \sin 2\pi f t \; dt$$

e pertanto:

$$x_p(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t) \cos 2\pi f t \; dt$$

$$x_d(t) \longleftrightarrow -j \int_{-\infty}^{+\infty} x_d(t) \sin 2\pi f t \; dt$$

Altre proprietà (4/6)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t) \cos 2\pi f t \; dt$$

è detta anche trasformata coseno di Fourier, ed è una funzione pari nel dominio della frequenza (f compare solo come argomento del coseno, che è pari).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_d(t) \sin 2\pi f t \; dt$$

è detta anche trasformata seno di Fourier, ed è una funzione dispari nel dominio della frequenza (f compare solo come argomento del seno, che è dispari).

Altre proprietà (5/6)

Complesso coniugato:

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-f)$$

Dimostrazione. Nel caso più generale, possiamo scrivere:
$x(t) = x_{\mathrm{pr}}(t) + jx_{\mathrm{pi}}(t) + x_{\mathrm{dr}}(t) + jx_{\mathrm{di}}(t)$ (somma di: parte reale pari, parte immaginaria pari, parte reale dispari e parte immaginaria dispari).

$$\begin{aligned} X(f) = \mathcal{F}(x(t)) = & \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\mathrm{pr}}(t) \cos 2\pi f t dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\mathrm{pi}}(t) \cos 2\pi f t dt + & \\ - j \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\mathrm{dr}}(t) \sin 2\pi f t dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\mathrm{di}}(t) \sin 2\pi f t dt & \end{aligned}$$

Altre proprietà (6/6)

Dimostrazione (cont.). Il complesso coniugato di $x(t)$ è
$x^*(t) = x_{\mathrm{pr}}(t) - jx_{\mathrm{pi}}(t) + x_{\mathrm{dr}}(t) - jx_{\mathrm{di}}(t)$ e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^*(t)) = & \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\mathrm{pr}}(t) \cos 2\pi f t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\mathrm{pi}}(t) \cos 2\pi f t dt + \\ & - j \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\mathrm{dr}}(t) \sin 2\pi f t dt - \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\mathrm{di}}(t) \sin 2\pi f t dt = \\ & = X^*(-f) \end{aligned}$$

Nota: Questa proprietà verrà usata in seguito per la dimostrazione del teorema di Parseval.

Esempi di trasformate di Fourier (1/6)

Trasformata di Fourier della funzione rettangolo:

$$x(t) = A \operatorname{rect}\frac{t}{T} = \begin{cases} A & \text{se} -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il grafico di questa funzione è un rettangolo, la cui area è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt = AT$$

Esempi di trasformate di Fourier (2/6)

La trasformata di Fourier del rettangolo è:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\ e^{-j2\pi ft}\ dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\ (\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft)\ dt \\ &= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos 2\pi ft\ dt \\ &= AT\ \frac{\sin \pi fT}{\pi fT} = AT\ \operatorname{sinc} fT \end{aligned}$$

dove la funzione sinc è definita come: $\operatorname{sinc}\varphi = \frac{\sin \pi\varphi}{\pi\varphi}$

Esempi di trasformate di Fourier (3/6)

Trasformata di Fourier della funzione sinc:
Le formule della trasformata e dell'antitrasformata di Fourier sono quasi identiche, a parte il segno nell'esponenziale, che però non influisce nel caso di segnali pari.
Avendo visto che la trasformata della funzione rettangolo è la funzione sinc, possiamo anche dire che la trasformata della funzione sinc:

$$x(t) = A \text{ sinc}\frac{t}{T}$$

è la funzione rettangolo:

$$X(f) = AT \text{ rect} fT$$

Esempi di trasformate di Fourier (4/6)

Trasformata di Fourier della funzione delta di Dirac:
La trasformata di Fourier della funzione delta di Dirac $\delta(t)$ si ottiene da quella del rettangolo ponendo $T \to 0$ e $AT = 1$. Risulta:

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \text{sinc } 0 = \lim_{T \to 0} \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = 1$$

Trasformata di Fourier di una costante:
La trasformata di Fourier della costante 1 è la delta di Dirac:

$$\mathcal{F}(1) = \delta(f)$$

Esempi di trasformate di Fourier (5/6)

Trasformata di Fourier del coseno:
La trasformata di un segnale cosinusoidale con ampiezza unitaria e frequenza f_0 è:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\cos 2\pi f_0 t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi f_0 t \; e^{-j2\pi f t} \, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \; e^{-j2\pi f t} \, dt = \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f-f_0) t} \, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f+f_0) t} \, dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right)
\end{aligned}$$

Esempi di trasformate di Fourier (6/6)

Trasformata di Fourier del seno:
La trasformata di un segnale sinusoidale con ampiezza unitaria e frequenza f_0 è:

$$\mathcal{F}(\sin 2\pi f_0 t) = \frac{-j}{2} \left(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0) \right)$$

(si calcola in modo analogo a quella del coseno)

Trasformata di Fourier di una funzione periodica:
In generale, la trasformata di Fourier di un segnale periodico nel tempo è una sommatoria di funzioni delta di Dirac nel dominio della frequenza, e le ampiezze delle funzioni delta di Dirac corrispondono ai coefficienti complessi della serie di Fourier.

Risposta in frequenza

Per un sistema LTI, la **risposta in frequenza** è la **trasformata di Fourier della risposta impulsiva**:

$$H(f) = \mathcal{F}(h(t))$$

Risulta:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

e, per due sistemi LTI in cascata:

$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

Correlazione tra due segnali (1/6)

Nell'elaborazione dei segnali, è importante avere un indicatore quantitativo della "somiglianza" tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$.
Un candidato per questo scopo potrebbe essere il prodotto scalare dei due segnali.
Il prodotto scalare di due segnali reali $x(t)$ e $y(t)$ è definito come:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) dt$$

Nel caso in cui i segnali $x(t)$ e $y(t)$ siano complessi, il prodotto scalare è:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$$

Correlazione tra due segnali (2/6)

Il prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt$$

non è un buon indicatore della "somiglianza" tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ perché è influenzato dal ritardo.
Ad esempio, se $x(t) = \sin 2\pi ft$ e $y(t) = \cos 2\pi ft$, si ha $\langle x, y \rangle = 0$. Le funzioni seno e coseno sono *ortogonali*, pur essendo una la versione traslata dell'altra rispetto al tempo.

Per avere un indicatore della "somiglianza", occorre una definizione che tenga conto anche dei ritardi (sfasamenti) tra i due segnali.

Correlazione tra due segnali (3/6)

Una buona misura della "somiglianza" tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ è data dalla loro correlazione $R_{xy}(t_1, t_2)$:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + t_1)y(t + t_2)dt$$

che è il prodotto scalare dei due segnali *traslati* nel tempo di t_1 e t_2 rispettivamente.
Per segnali complessi, la correlazione è:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + t_1)y^*(t + t_2)dt$$

In generale, la correlazione è una funzione di *DUE* istanti temporali.

Correlazione tra due segnali (4/6)

Per segnali deterministici, la correlazione dipende solo dalla differenza $t_1 - t_2 = \tau$ e si può scrivere come:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(t)dt$$

o, per segnali complessi, come:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt$$

Correlazione tra due segnali (5/6)

Attenzione a NON confondere la correlazione R_{xy}

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt$$

con la convoluzione $x * y$

$$x * y = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

Nella formula della correlazione, la variabile di integrazione (t) compare CON LO STESSO SEGNO per x e y; nella convoluzione la variabile di integrazione (τ) compare CON SEGNI OPPOSTI.
Inoltre, nella correlazione il secondo termine è il coniugato del segnale.

Correlazione tra due segnali (6/6)

La correlazione dipende dall'ordine con cui vengono considerati i due segnali $x(t)$ e $y(t)$:

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)x(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t'-\tau)y(t')dt' \\ &= R_{xy}(-\tau) \end{aligned}$$

dove si è usata la sostituzione $t' = t + \tau$ (e quindi $dt' = dt$).
Per segnali complessi,

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t'-\tau)y(t')dt' = R_{xy}^*(-\tau)$$

Segnali incorrelati

Due segnali per cui $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0$ per $\forall\tau$ sono *incorrelati* (o *incoerenti*).

Nota: è preferibile evitare di usare l'aggettivo "incoerenti" per segnali aventi correlazione nulla, perché nella teoria del campionamento l'aggettivo "coerente" viene usato con un altro significato.

Autocorrelazione di un segnale (1/3)

La correlazione di un segnale con sé stesso è l'autocorrelazione $R_{xx}(\tau)$:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(t)dt$$

Per un segnale complesso:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

Autocorrelazione di un segnale (2/3)

L'autocorrelazione di un segnale reale è una funzione pari:

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$$

L'autocorrelazione di un segnale complesso è una funzione hermitiana (cambiando segno all'argomento la funzione assume il valore coniugato):

$$R_{xx}(-\tau) = R^*_{xx}(\tau)$$

Autocorrelazione di un segnale (3/3)

L'autocorrelazione calcolata per $\tau = 0$ è l'energia del segnale:

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E$$

e questo valore è il massimo della funzione di autocorrelazione.

Infatti, qualsiasi segnale è massimamente correlato con sé stesso quando lo sfasamento è nullo:

$$R_{xx}(0) \geq R_{xx}(\tau)$$

e l'uguaglianza vale solo se $x(t)$ è un segnale periodico con periodo T e τ è un multiplo intero di T: in questo caso, anche l'autocorrelazione è periodica con periodo T.

Teorema di Parseval

Un segnale $x(t)$ ha energia finita se

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

L'integrale può essere calcolato anche nel dominio della frequenza:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

Quindi risulta l'uguaglianza nota come teorema di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

Teorema di Parseval (dimostrazione)

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \\
&= \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{f=-\infty}^{+\infty} X^*(-f) e^{j2\pi ft} df \right) dt = \\
&= \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{f=-\infty}^{+\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft} df \right) dt = \\
&= \int_{f=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right) X^*(f) df = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df
\end{aligned}
$$