Teoria dei Segnali – Densità spettrale di energia e di potenza; campionamento e teorema di Shannon

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Teoria dei Segnali – Densità spettrale; campionamento – 8 novembre 2010

Contenuto

1. Densità spettrale di energia
2. Densità spettrale di potenza
3. Campionamento
4. Teorema del campionamento
5. Aliasing
6. Ricostruzione di un segnale campionato
7. Una rappresentazione geometrica dei segnali

Teorema di Parseval

Per un segnale ad energia finita, l'energia normalizzata può essere calcolata integrando il quadrato del modulo del segnale nel dominio del tempo o nel dominio della frequenza (teorema di Parseval):

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

Densità spettrale di energia (1/3)

L'energia di un segnale è:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

e quindi la quantità $|X(f)|^2$ prende il nome di densità spettrale di energia.

La densità spettrale di energia non è mai negativa:

$$|X(f)|^2 \geq 0$$

Se il segnale $x(t)$ è reale, allora la densità spettrale di energia è pari:

$$|X(-f)|^2 = |X(f)|^2$$

Densità spettrale di energia (2/3)

La densità spettrale di energia ha questo nome perchè $|X(f)|^2\,df$ rappresenta l'energia (normalizzata) del segnale nell'intervallo di frequenze $(f, f + df)$.
L'energia *totale* del segnale $x(t)$ nella banda di frequenze (f_1, f_2), considerando anche il contributo delle frequenze negative, è:

$$E = \int_{-f_2}^{-f_1} |X(f)|^2\, df + \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2\, df$$

e se $x(t)$ è reale, allora risulta

$$E = 2\int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2\, df$$

Densità spettrale di energia (3/3)

Per un segnale ad energia finita, la densità spettrale di energia $|X(f)|^2$ è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(t)dt$$

cioè possiamo scrivere:

$$|X(f)|^2 \longleftrightarrow R_{xx}(\tau)$$

$$|X(f)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

(Teorema di Wiener-Khinchin)

Densità spettrale di potenza (1/5)

La potenza di un segnale è:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

che può essere vista come il limite del rapporto tra l'energia del segnale nell'intervallo temporale $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ e la durata dell'intervallo temporale stesso T.

Densità spettrale di potenza (2/5)

Indichiamo con $x_T(t)$ il segnale $x(t)$ "troncato" all'interno della finestra temporale $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$:

$$x_T(t) = x(t)\mathrm{rect}\frac{t}{T} = \begin{cases} x(t) & \text{se } -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La densità spettrale di potenza è definita come il limite del rapporto tra la densità spettrale di energia del segnale troncato $|X_T(f)|^2$ e l'ampiezza della finestra T:

$$S_{xx}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

Nota: Come per l'autocorrelazione, usiamo il doppio pedice.

Densità spettrale di potenza (3/5)

La densità spettrale di potenza non è mai negativa:

$$S_{xx}(f) \geq 0$$

Se il segnale $x(t)$ è reale, allora la densità spettrale di potenza è pari:

$$S_{xx}(f) = S_{xx}(-f)$$

La potenza totale si può calcolare integrando la densità spettrale di potenza

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)df$$

Densità spettrale di potenza (4/5)

Per un segnale a potenza finita, si definisce l'autocorrelazione come:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x(t)dt$$

Per segnali complessi:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

Densità spettrale di potenza (5/5)

Anche per i segnali a potenza finita, la densità spettrale di potenza è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione:

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}(R_{xx}(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

e, se $x(t)$ è un segnale reale,

$$S_{xx}(f) = 2\int_{0}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau$$

Per segnali reali, talvolta si definisce la densità spettrale di potenza *monolatera*, cioè solo per le *frequenze positive*:

$$S_{xx}^{+}(f) = 4\int_{0}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau; \quad P = \int_{0}^{\infty} S_{xx}^{+}(f) df$$

Dai segnali analogici ai segnali digitali

Il DSP (Digital Signal Processing) consiste nel campionare un processo continuo e nell'estrarre un insieme di numeri che rappresentano il processo che viene campionato.

L'elaborazione digitale permette di sfruttare in modo ottimale le risorse di calcolo e di memoria: l'informazione digitalizzata è più semplice da memorizzare, da elaborare e da trasmettere.

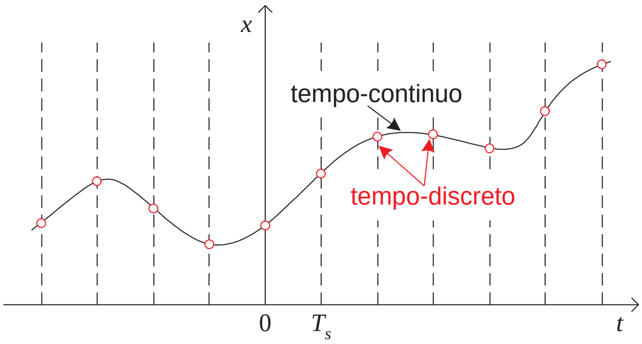
Svantaggi:

- il campionamento (discretizzazione) fa perdere informazioni sulla frequenza dei segnali
- la digitalizzazione (quantizzazione) fa perdere informazioni sull'ampiezza dei segnali

Campionamento o discretizzazione

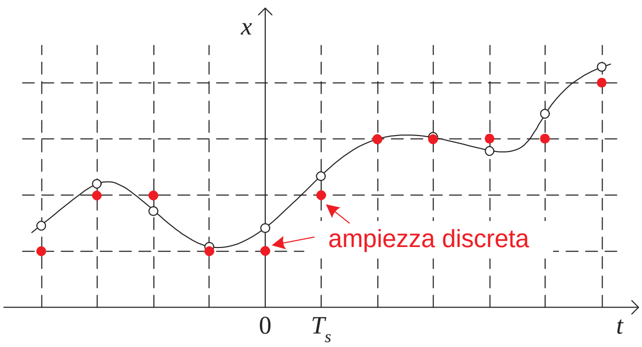
Da un segnale $x(t)$ vengono estratti i campioni presi agli istanti 0, $\pm T_s$, $\pm 2T_s$, ... (campionamento uniforme nel tempo).
Si ottiene la SUCCESSIONE DI CAMPIONI

$$\ldots, x(-2T_s), x(-T_s), x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots$$



Digitalizzazione o quantizzazione

I campioni estratti $x(nT_s)$ vengono convertiti in numeri (a precisione finita)



L' ELABORAZIONE DIGITALE È POSSIBILE SOLO DOPO AVERE CAMPIONATO E QUANTIZZATO

Delta di Dirac e campionamento (1/6)

Il campionamento consiste nell'estrarre il valore che una funzione continua assume in un singolo istante t_0.

Una proprietà della delta di Dirac è la seguente:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)\, dt$$

La funzione $\delta(t)$, traslata attorno a t_0, moltiplicata per una qualsiasi funzione $x(t)$ e integrata da $-\infty$ a $+\infty$, estrae il valore che la $x(t)$ assume per $t = t_0$.

Delta di Dirac e campionamento (2/6)

La funzione:

$$x_s(t) = x(t)\delta(t - t_0)$$

ottenuta moltiplicando la $x(t)$ per la delta di Dirac traslata $\delta(t - t_0)$, ha le seguenti proprietà:

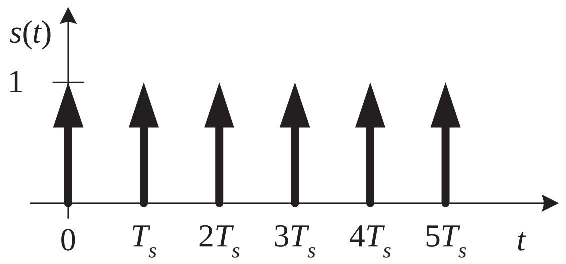
- è nulla per $\forall t \neq t_0$;
- estraendone il campione per $t = t_0$ si ottiene $x(t_0)$.

Quindi la funzione $x_s(t) = x(t)\delta(t - t_0)$ descrive matematicamente il segnale che si ottiene campionando $x(t)$ al tempo t_0.

Delta di Dirac e campionamento (3/6)

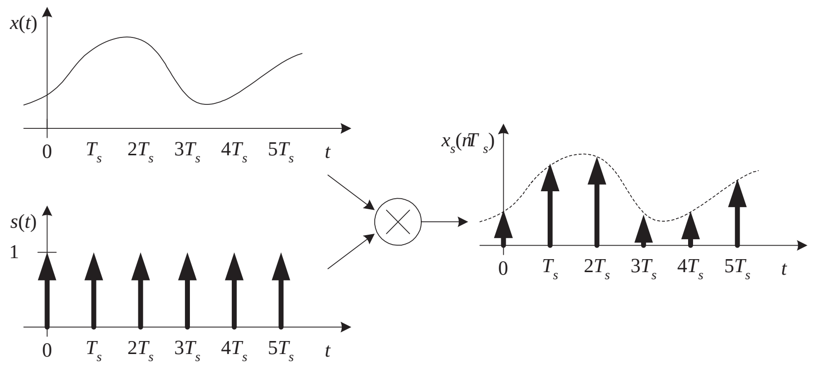
Una serie infinita di funzioni delta di Dirac, equispaziate nel tempo di T_s, descrive il campionamento uniforme con periodo T_s:

$$Ш(t) = s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



Questa funzione è chiamata pettine di Dirac (*"Dirac comb"*); talvolta viene indicata con la lettera Ш ("sha") dell'alfabeto cirillico.

Delta di Dirac e campionamento (4/6)



Il segnale campionato $x_s(t)$ è:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s)$$

La successione delle ampiezze del segnale campionato è $x[n] = x(nT_s)$.

Delta di Dirac e campionamento (5/6)

La trasformata di Fourier del pettine (infinito) di Dirac

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

è ancora un pettine di Dirac:

$$S(f) = \mathcal{F}(s(t)) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF_s)$$

con

$$F_s = \frac{1}{T_s}$$

Delta di Dirac e campionamento (6/6)

$$S(f) = \mathcal{F}(s(t)) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF_s)$$

Infatti, poiché $s(t)$ è reale, pari, discreta e periodica con periodo T_s, anche $S(f)$ è reale, pari, periodica e discreta (cioè $S(f) \neq 0$ solo quando f è un multiplo intero di $F_s = \frac{1}{T_s}$).
Inoltre, poiché

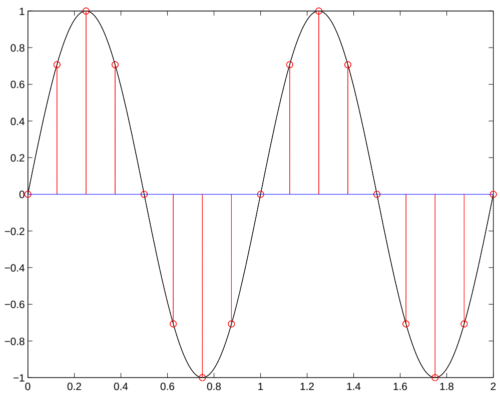
$$\mathcal{F}(\delta(t - nT_s) + \delta(t + nT_s)) = 2 \cos 2n\pi f T_s,$$

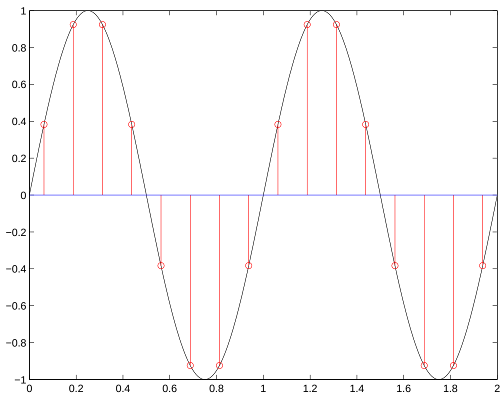
risulta:

$$S(f) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\pi f T_s$$

e per $f = kF_s$ tutti i coseni valgono 1, quindi $S(kF_s) \to +\infty$.

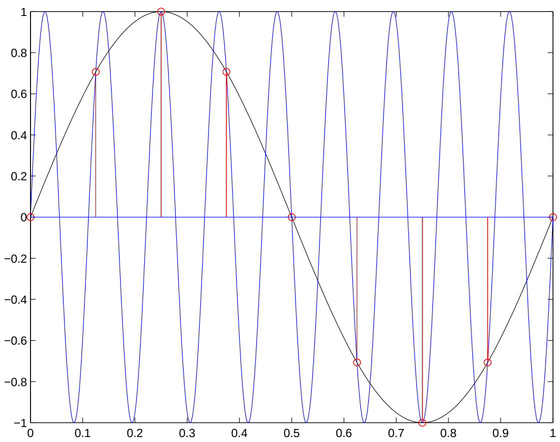
Traslazione nel tempo





Se il segnale $x(t)$ o la funzione di campionamento $s(t)$ sono traslati nel tempo, la sequenza di dati campionati è diversa
$\rightarrow$ IL CAMPIONAMENTO NON È TEMPO-INVARIANTE

Dipendenza dalla frequenza



La sequenza di dati campionati non corrisponde ad un unico segnale $x(t)$: segnali a diversa frequenza possono dare la stessa successione di campioni!

Teorema del campionamento (Shannon)

Il campionamento fa perdere informazioni sulla frequenza del segnale
$\longrightarrow$ esistono condizioni da rispettare affinché la successione di campioni sia una rappresentazione adeguata del processo che viene campionato.

Teorema del campionamento (di Shannon):
Un segnale $x(t)$ continuo nel tempo, la cui trasformata di Fourier $X(f)$ è limitata in banda (cioè $|X(f)| = 0$ per $\forall\,|f| \notin (f_0, f_0 + B)$), può essere ricostruito in maniera univoca senza errori da una successione di campioni equispaziati nel tempo $x(kT_s)$, a condizione che la frequenza di campionamento $F_s = \frac{1}{T_s}$ sia maggiore o uguale alla frequenza di Nyquist del segnale $2B$.

C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise", *Proc. IRE*, vol. 37, pp. 10–21, Jan. 1949. Reprinted in *Proc. IEEE*, vol. 86, pp. 447–457, Feb. 1998.

Proprietà dei segnali campionati

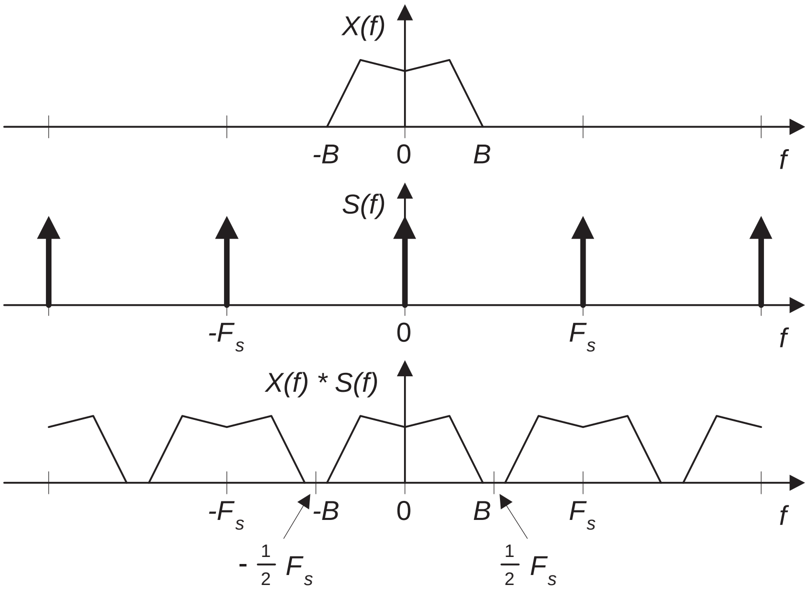
Proprietà della trasformata di Fourier:

$$x(t) \text{ periodico} \leftrightarrow X(f) \text{ discreto}$$
$$x(t) \text{ discreto (campionato)} \leftrightarrow X(f) \text{ periodico}$$

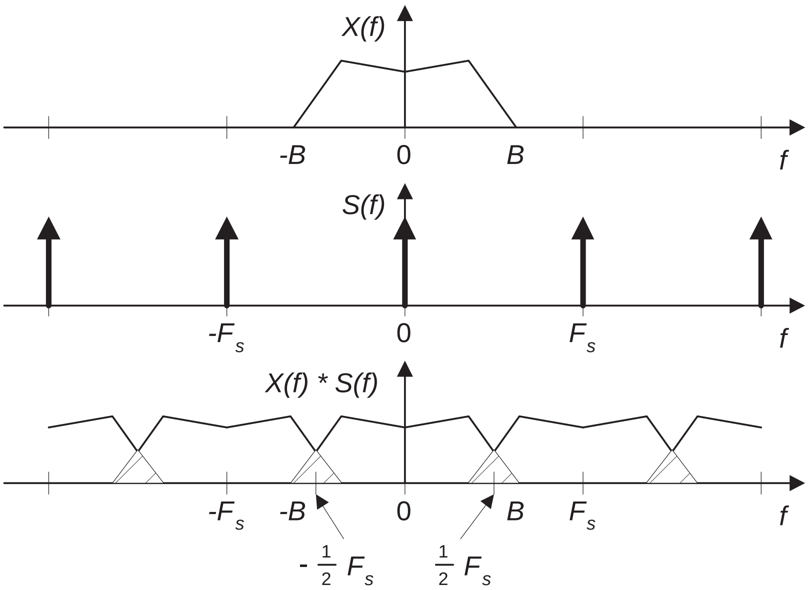
Un segnale campionato $x(kT)$ è completamente rappresentato nel dominio della frequenza da $X(f)$, con $f \in \left[0, \frac{1}{T}\right]$ (o, in modo equivalente, $f \in \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$).

È impossibile distinguere tra $X(f + nF_s)$ e $X(f)$ $\rightarrow$ **aliasing**

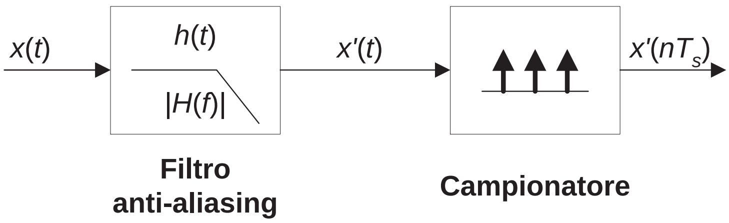
Campionamento senza aliasing



Campionamento con aliasing



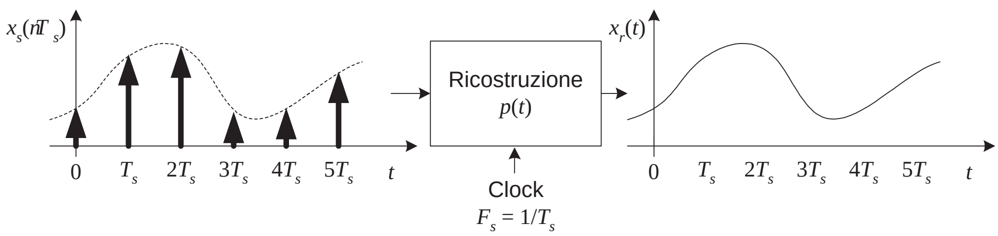
Filtraggio anti-aliasing



Per evitare il fenomeno dell'aliasing, è necessario usare un filtro di anti-aliasing che rimuova le componenti (volute o non volute) del segnale $x(t)$ che si trovano a frequenze superiori alla frequenza di Nyquist.

Ricostruzione

Il processo inverso del campionamento è la **ricostruzione** del segnale continuo a partire dalla successione dei campioni.



$p(t)$ è il **filtro di ricostruzione**
Idealmente, il segnale ricostruito $x_r(t)$ dovrebbe essere uguale al segnale originale $x(t)$ prima del campionamento; in pratica, ci sono errori dovuti alle non idealità.

Rappresentazione geometrica dei segnali

Dal teorema del campionamento, risulta che un segnale di banda B e durata T deve essere campionato prendendo almeno $2BT$ campioni.

Questi campioni possono essere pensati come le "coordinate" del segnale campionato $x_s(nT_s)$ rappresentato in uno spazio a $2BT$ dimensioni.

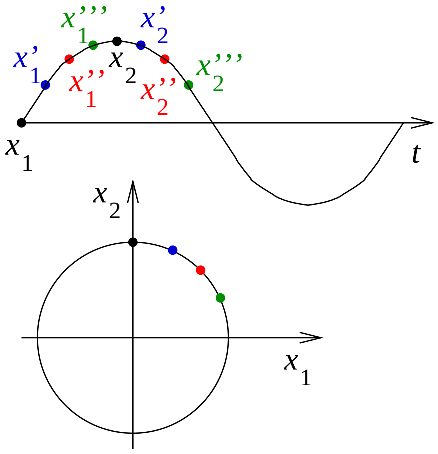
Rappresentazione geometrica: proprietà

Dall'analogia con lo spazio geometrico, si possono ricavare alcune proprietà:

1. l'aumento della banda o della durata temporale fanno aumentare la dimensione dello spazio del segnale campionato;
2. un ritardo (differenza di fase) tra segnale e campionamento fa cambiare le coordinate del segnale campionato;
3. allo stesso segnale campionato corrisponde un insieme di punti diversi che lo rappresentano; tutti i punti che rappresentano lo stesso segnale possono essere raggruppati in una "classe di equivalenza";
4. il quadrato della "distanza" di un segnale dall'origine $d^2 = \sum_{n=1}^{2BT} |x_s(nT_s)|^2$ è proporzionale alla potenza media P del segnale: $d^2 = 2BTP$;
5. l'aggiunta di rumore avente potenza N (non superiore a P) provoca uno spostamento casuale del punto corrispondente al segnale, che viene "delocalizzato" all'interno di una sfera di raggio $r = \sqrt{2BTN}$.

C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise", *Proc. IRE*, vol. 37, pp. 10–21, Jan. 1949. Reprinted in *Proc. IEEE*, vol. 86, pp. 447–457, Feb. 1998.

Rappresentazione geometrica: esempio



Campionando la stessa sinusoide con lo stesso periodo di campionamento, ma in istanti di tempo differenti, nello spazio dei campioni $x_1 x_2$ si ottengono punti diversi, tutti alla stessa distanza dall'origine.