Teoria dei Segnali –
Quantizzazione dei segnali; trasformata zeta

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

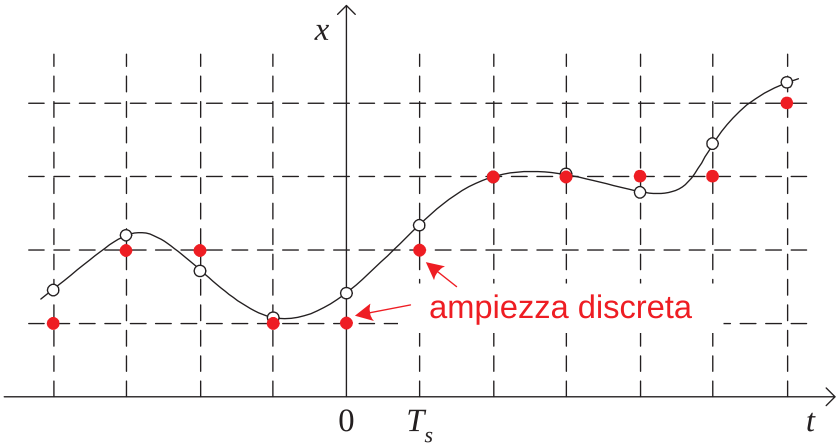
Teoria dei Segnali – Quantizzazione; trasformata zeta – 8 novembre 2010

Contenuto

1. Quantizzazione
2. Errore di quantizzazione
3. Trasformata zeta
4. Antitrasformata zeta
5. Proprietà della trasformata zeta

Digitalizzazione o quantizzazione (1/2)

La successione di campioni $x[n] = x(nT_s)$ viene convertita in una sequenza di numeri (a precisione finita):

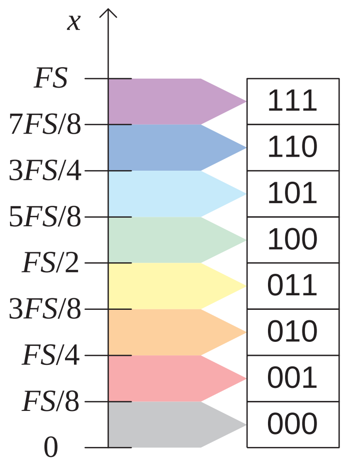


Digitalizzazione o quantizzazione (2/2)

Se vengono rispettate le condizioni del teorema di Shannon, il campionamento non fa perdere informazioni sul segnale: i campioni di un segnale analogico sono (idealmente) a precisione infinita.

L'elaborazione numerica richiede di codificare i campioni con NUMERI interi.
Avendo a disposizione una parola digitale di D bit per codificare un numero, ci sono 2^D possibili codici: da 0 a $2^D - 1$.
La quantizzazione consiste nel dividere l'insieme dei possibili valori analogici in 2^D intervalli, e nell'associare ad ogni intervallo un codice. Ogni codice digitale rappresenta un intervallo di valori analogici.

Quantizzazione uniforme



Esempio: quantizzazione di un segnale *unipolare* (da 0 a FS = fondo scala) con passo di quantizzazione uniforme: il risultato è un *numero intero senza segno*

Risoluzione del quantizzatore

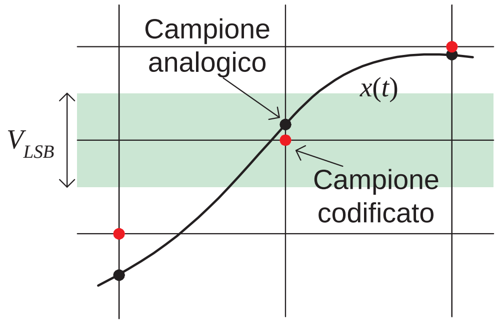
Il passo di quantizzazione è la variazione minima dell'ampiezza del segnale analogico per cui cambia di una unità il codice in uscita di un quantizzatore ideale.

Il passo di quantizzazione è detto anche LSB (Least Significant Bit). Per un quantizzatore a D bit con dinamica di ingresso da 0 a FS è:

$$V_{LSB} = \frac{FS}{2^D - 1}$$

Errore di quantizzazione (1/2)

Per un quantizzatore ideale, assumendo che il codice i-esimo corrisponda al segnale analogico a metà dell'intervallo i-esimo, l'errore massimo è compreso tra $-\frac{1}{2}V_{LSB}$ e $+\frac{1}{2}V_{LSB}$.



$$x_c[n] = x(nT_s) + q[n]$$

Errore di quantizzazione (2/2)

L'errore di quantizzazione q dipende dal segnale in ingresso al quantizzatore. Nell'ipotesi che la distribuzione di ampiezza del segnale all'interno di ciascun intervallo di quantizzazione sia **uniforme**, allora l'errore di quantizzazione ha media nulla e valore quadratico medio

$$q_{\mathrm{rms}} = \frac{V_{LSB}}{\sqrt{12}}$$

Nel caso di segnali periodici campionati con frequenza di campionamento pari ad un multiplo intero della frequenza del segnale, l'errore di quantizzazione è anch'esso periodico e l'equazione precedente non vale più!

Rumore di quantizzazione

Non è del tutto corretto parlare di rumore di quantizzazione: si tratta di un errore di quantizzazione che dipende dal segnale di ingresso (e quindi è correlato con il segnale).
Tuttavia, spesso si parla di rumore di quantizzazione, in quanto è dimostrato che l'errore di quantizzazione è statisticamente equivalente ad un rumore bianco se:

- l'ampiezza dell'intervallo di quantizzazione è piccola;
- il numero di bit di risoluzione è elevato;
- il segnale analogico occupa una banda continua di frequenze;
- il segnale analogico ha una distribuzione di ampiezza uniforme entro ciascun intervallo di quantizzazione.

W. R. Bennett, "Spectrum of quantized signals", *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 446–472, July 1948.

Risposta dei sistemi LTI tempo-discreti

Un sistema LTI tempo-discreto è descritto dalla risposta impulsiva $h[n]$.

Per un sistema LTI tempo-discreto, è possibile ricavare la risposta in frequenza nel dominio f, data da:

$$
\begin{aligned}
H(f) &= \mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\delta(t-nT_s)\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\mathcal{F}\left(\delta(t-nT_s)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j2n\pi f T_s}
\end{aligned}
$$

Il risultato è una serie di esponenziali complessi (che può essere anche scritta come serie complessa di seni e coseni), periodica in f.

Trasformata zeta (1/2)

Esiste uno strumento più semplice per trattare matematicamente i sistemi LTI tempo-discreti: la trasformata zeta.

La trasformata zeta di un segnale tempo-discreto $x[n]$ è definita come:

$$X(z) = \mathcal{Z}(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

dove z è una variabile complessa.

$\mathcal{Z}$ è l'operatore che trasforma $x[n]$ in $X(z)$: $x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$

Trasformata zeta (2/2)

Confrontando la trasformata zeta di $x[n]$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

con la trasformata di Fourier di $x[n]$:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2n\pi f T_s}$$

si vede che le due trasformate coincidono, ponendo:

$$z = e^{j2\pi f T_s}$$

Regione di convergenza (1/2)

La trasformata zeta associa ad una successione di campioni $x[n]$ la funzione complessa:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$X(z)$ è una funzione continua definita nel piano complesso z.

L'insieme dei punti del piano z per cui $X(z) < \infty$ costituisce la regione di convergenza (in inglese: *ROC = Region Of Convergence*).

Regione di convergenza (2/2)

Esempio: il gradino di Heaviside tempo-discreto

$$u[n] = \begin{cases} 0 & \text{se } \ n < 0 \\ 1 & \text{se } \ n \geq 0 \end{cases}$$

ha come trasformata zeta la funzione:

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

L'ultimo passaggio è lecito solo se il termine generale della serie $\sum_n z^{-n}$ tende a zero al crescere di n, cioè se $\left|z^{-1}\right| < 1$.
Quindi la regione di convergenza è $|z| > 1$.
Per $z \to 1$, $U(z) \to \infty$; si dice che $z = 1$ è un polo di $U(z)$.

Antitrasformata zeta

Dalla trasformata zeta $X(z)$ si può ricavare la sequenza di campioni $x[n]$:

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}(X(z)) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

dove Γ è una curva chiusa, percorsa in senso antiorario, interamente contenuta nella regione di convergenza di $X(z)$, e che racchiude al suo interno tutti i poli di $X(z)$.

Proprietà della trasformata zeta (1/2)

Poiché la trasformata zeta è la trasformata di Fourier di un segnale campionato, in cui al posto di f si usa

$$z = e^{j2\pi f T_s},$$

per $X(z)$ valgono le proprietà della trasformata di Fourier.

- Linearità:

$$x_1[n] + x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z) + X_2(z)$$

$$kx[n] \longleftrightarrow kX(z)$$

Proprietà della trasformata zeta (2/2)

- Traslazione:
$$x[n-k] \longleftrightarrow z^{-k}X(z)$$
- Moltiplicazione e convoluzione:
$$x_1[n] \cdot x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z) * X_2(z)$$
$$x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$$
- Differenziazione:
$$nx[n] \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Esempi (1/3)

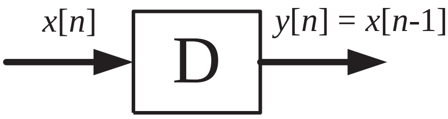
La trasformata zeta della delta di Dirac tempo-discreta $\delta[n]$ è:

$$\mathcal{Z}(\delta[n]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} = z^0 = 1$$

Come nel caso dei segnali tempo-continui, anche per i segnali tempo-discreti la delta di Dirac è l'elemento neutro rispetto all'operazione di convoluzione:

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{i=-\infty}^{n} x[i] \cdot \delta[n-i] = x[n]$$

Esempi (2/3)



Un elemento di ritardo che riceve in ingresso una delta di Dirac ha come risposta impulsiva la delta di Dirac ritardata:

$$h[n] = \delta[n-1]$$

Si tratta di un sistema LTI causale con memoria. Nel dominio zeta, la risposta in frequenza del ritardo è:

$$H(z) = z^{-1}$$

che ha come regione di convergenza $\forall z \neq 0$.

Esempi (3/3)

Un qualsiasi sistema tempo-discreto causale ha $h[n] = 0$ per $\forall n < 0$; quindi la sua trasformata zeta è:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

e comprende solo le potenze negative di z.

Per un sistema causale, la regione di convergenza di $H(z)$ comprende sempre $|z| = \infty$.