Teoria dei Segnali – Discrete Fourier Transform (DFT) e Fast Fourier Transform (FFT); filtri tempo-continui

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

Teoria dei Segnali – DFT e FFT; filtri tempo-continui – 15 novembre 2010

Contenuto

Trasformata Discreta di Fourier (1/3)

DFT: Discrete Fourier Transform
Consideriamo una successione $x[n] = x(n\Delta t)$ di N campioni ($n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$) ottenuti campionando il segnale $x(t)$ in modo uniforme nel tempo, con periodo Δt.
La **trasformata discreta di Fourier** è definita come:

$$X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-j2\pi k\Delta f n\Delta t}$$

dove Δf è l'intervallo di campionamento in frequenza:

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$$

Trasformata Discreta di Fourier (2/3)

Osservazione: La definizione di DFT

$$X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-j2\pi k\Delta f n\Delta t}$$

si ottiene dalla trasformata di Fourier, discretizzando il tempo t e la frequenza f, e sostituendo l'integrale con la sommatoria sugli N campioni.

L'**antitrasformata discreta di Fourier** è:

$$x(n\Delta t) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f) e^{j2\pi k\Delta f n\Delta t}$$

Trasformata Discreta di Fourier (3/3)

Per semplificare la notazione, tralasciamo di scrivere sia il periodo di campionamento Δt sia l'intervallo di frequenza Δf, cioè consideriamo le due successioni $x[n]$ e $X[k]$.

La trasformata discreta di Fourier è:

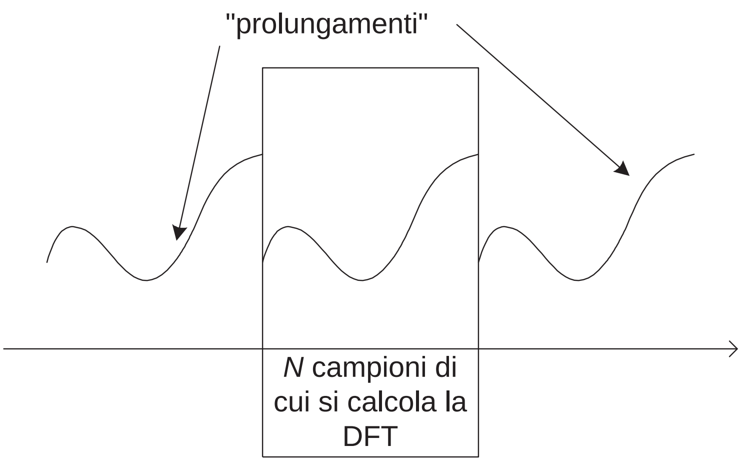
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

L'antitrasformata discreta di Fourier è:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}$$

Proprietà della DFT

La DFT ha tutte le proprietà della trasformata di Fourier.
Inoltre, ipotizza (implicitamente) la periodicità del segnale al di fuori dell'intervallo considerato.



Complessità dell'algoritmo di DFT

Dalla
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$
si vede che la complessità dell'algoritmo è $\mathcal{O}(N^2)$.

Se N non è un numero primo, allora è possibile ottimizzare il calcolo raggruppando alcune operazioni in modo opportuno (che dipende dalla fattorizzazione di N)
$\longrightarrow$ algoritmo "FAST", con minore complessità computazionale

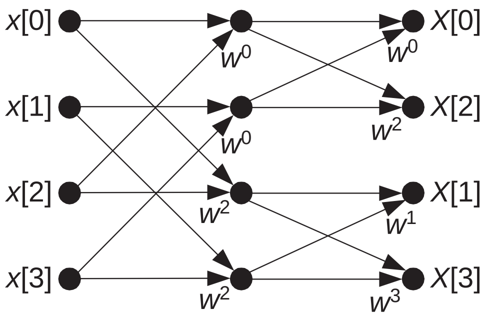
Fast Fourier Transform (FFT)

La FFT è una DFT "FAST" perché usa un algoritmo più veloce.

La maggiore riduzione dei tempi di calcolo si ha quando N è una potenza di 2:
$$N = 2^p$$
In questo caso si usa l'algoritmo di Cooley-Tukey noto come FFT-2 o *"radix-2 FFT"*, la cui complessità è $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.

Fast Fourier Transform (FFT)

Algoritmo di Cooley-Tukey:



$w^n = e^{j2\pi n/N}$ è la radice n-esima dell'unità in $\mathbb{C}$
I campioni della trasformata sono ottenuti con un ordine diverso da quello "naturale" (bit-reversed order: 00, 10, 01, 11 invece di 00, 01, 10, 11)

Filtraggio

Un **filtro** è un sistema **selettivo in frequenza**:
vengono trasmesse tra ingresso e uscita solo le componenti di segnale comprese in un certo intervallo di frequenze (la cosiddetta "banda passante"), mentre non passano in uscita le componenti alle altre frequenze (la cosiddetta "banda oscura").

I filtri possono essere:

- **lineari** oppure **non lineari**;
- **tempo-invarianti** oppure **tempo-varianti**;
- **tempo-continui** oppure **tempo-discreti**.

Nel seguito, consideriamo solo filtri **lineari tempo-invarianti** (LTI), caratterizzati dalla risposta in frequenza $H(f) = \mathcal{F}(h(t))$ o $H(z) = \mathcal{Z}(h[n])$.

Filtri LTI nel dominio del tempo

Un filtro LTI è caratterizzato dalla sua risposta impulsiva $h(t)$ (se è tempo-continuo) o $h[n]$ (se è tempo-discreto).
Un filtro LTI causale ha $h(t) = 0$ per $\forall t < 0$ (o $h[n] = 0$ per $\forall n < 0$).
La risposta impulsiva può avere:

- durata temporale finita, se $\exists T$ tale che $h(t) = 0$ per $\forall t > T$ (o $\exists N$ tale che $h[n] = 0$ per $\forall n > N$): il filtro è di tipo **FIR** (Finite Impulse Response), cioè con *risposta finita all'impulso*;
- durata temporale infinita, se non esiste nessun T (o N) dopo il quale la risposta impulsiva va a zero: il filtro è di tipo **IIR** (Infinite Impulse Response), cioè con *risposta infinita all'impulso*.

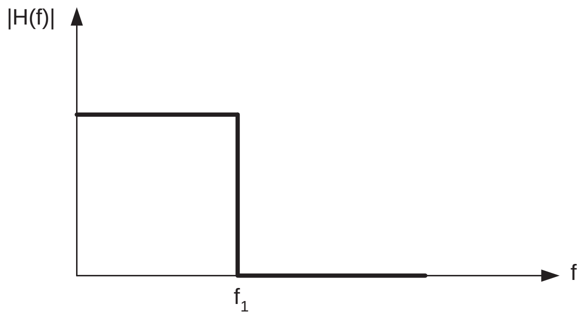
Densità di energia in uscita

Per un filtro con risposta in frequenza $H(f)$:

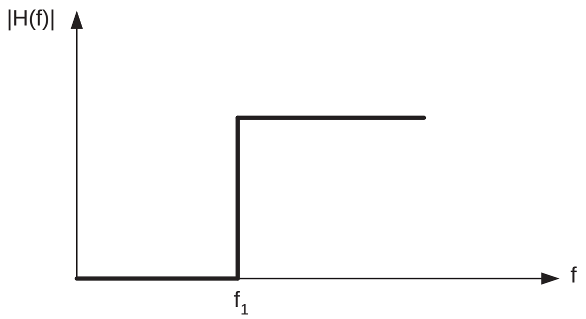
$$|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 \, |H(f)|^2$$

Filtri LTI in frequenza (1/2)

Filtro passa-basso:

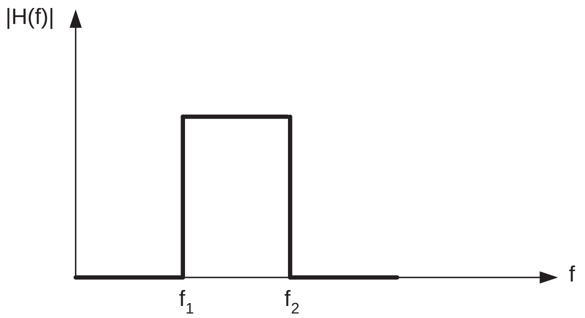


Filtro passa-alto:

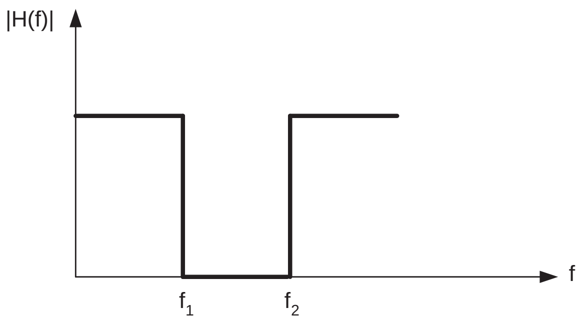


Filtri LTI in frequenza (2/2)

Filtro passa-banda:



Filtro arresta-banda:



Filtri LTI tempo-continui

La risposta in frequenza è data da:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot j2\pi f + \alpha_2 (j2\pi f)^2 + \cdots + \alpha_M (j2\pi f)^M}{\beta_0 + \beta_1 \cdot j2\pi f + \beta_2 (j2\pi f)^2 + \cdots + \beta_N (j2\pi f)^N}$$

$H(f)$ è il quoziente di due polinomi in $(j2\pi f)$. Ponendo $s = j2\pi f$, si può scrivere:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots + \alpha_M s^M}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \cdots + \beta_N s^N}$$

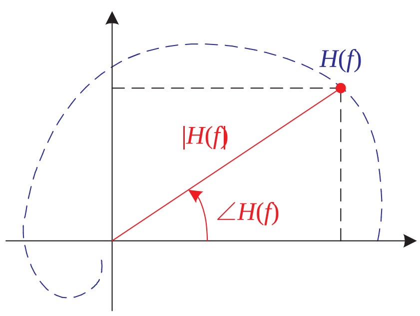
Nota: la variabile s è quella della *trasformata di Laplace*, che si usa in elettronica e in automatica per studiare la risposta in transitorio dei sistemi dinamici.

Diagrammi di Bode (1/5)

La risposta in frequenza $H(f)$ è una grandezza complessa, che varia con la frequenza f, e può essere scritta come:

$$H(f) = |H(f)|\, e^{j\angle H(f)}$$

dove $|H(f)|$ è il **modulo** o **ampiezza**, e $\angle H(f)$ è la **fase** (sia il modulo sia la fase dipendono dalla frequenza f).



Diagrammi di Bode (2/5)

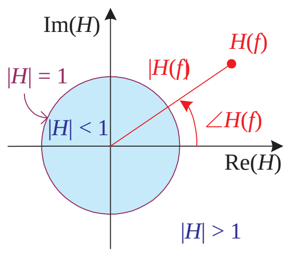
Per rappresentare graficamente $H(f)$, si usano i **diagrammi di Bode**:

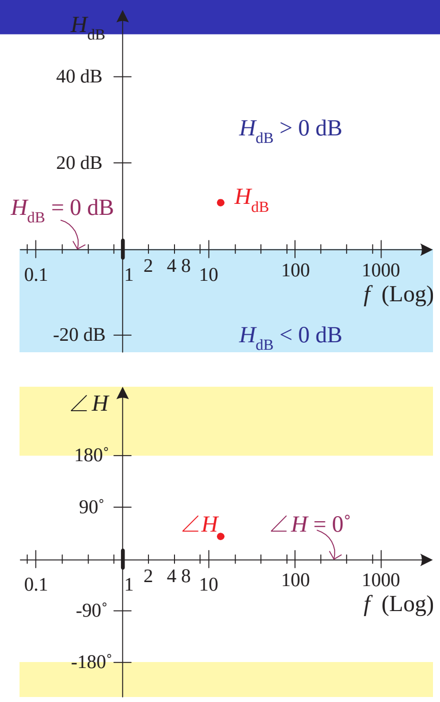
- il diagramma di Bode dell'ampiezza (o modulo): in ascissa si riporta la frequenza f in scala logaritmica, in ordinata il modulo del guadagno in decibel (che è un'unità di misura logaritmica):

$$H_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H|$$

- il diagramma di Bode della fase (o sfasamento) in ascissa si riporta la frequenza f in scala logaritmica, in ordinata lo sfasamento (in radianti oppure in gradi).

Diagrammi di Bode (3/5)





Diagrammi di Bode (4/5)

- Nel diagramma di Bode dell'ampiezza, l'uso della scala logaritmica permette di rappresentare con una retta sia la proporzionalità diretta, sia quella inversa.
- Di solito l'asse delle frequenze è diviso in decadi, cioè in intervalli ai cui estremi la frequenza varia di un fattore 10.
- Più raramente, l'asse delle frequenze è diviso in ottave, cioè in intervalli ai cui estremi la frequenza varia di un fattore 2 (il termine "ottava" deriva dal fatto che tra il primo e l'ottavo tasto bianco del pianoforte la frequenza del suono è raddoppiata).

Diagrammi di Bode (5/5)

- La frequenza zero (cioè la continua) in scala logaritmica va a $-\infty$ sull'asse delle ascisse; il guadagno nullo corrisponde a $-\infty$ dB sull'asse delle ordinate.
- La fase non è univoca: aggiungendo o sottraendo 2π ($= 360°$) il punto nel piano non cambia posizione.

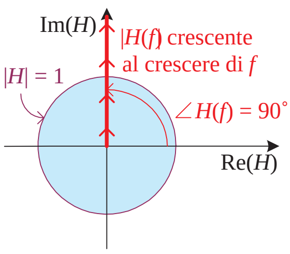
Derivatore (1/2)

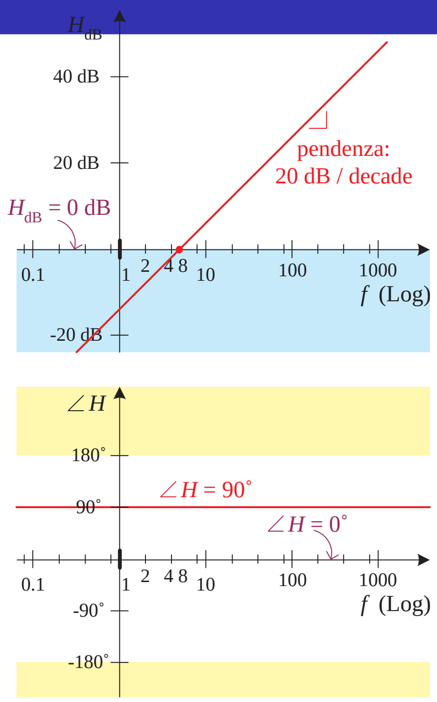
$$y(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = j2\pi f\tau$$

La risposta in frequenza è immaginaria e cresce con la frequenza.

Derivatore (2/2)





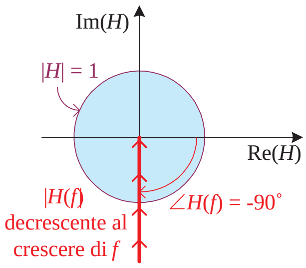
Integratore (1/2)

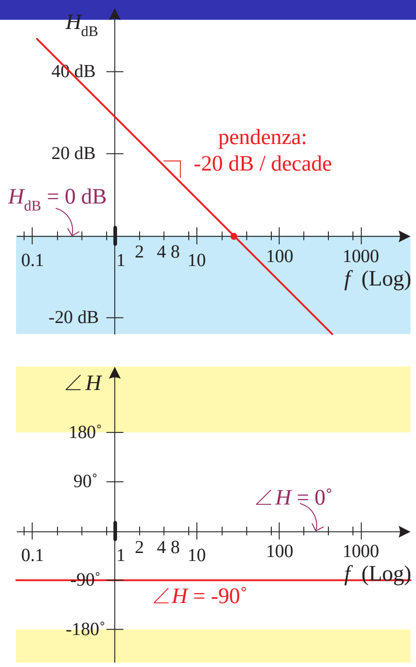
$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{j2\pi f\tau} = \frac{-j}{2\pi f\tau}$$

La risposta in frequenza è immaginaria e negativa; il suo modulo è inversamente proporzionale alla frequenza.

Integratore (2/2)





Frequenza di guadagno unitario

Sia per il derivatore, sia per l'integratore, la frequenza per cui il diagramma di Bode del modulo attraversa l'asse a 0 dB è data dalla soluzione dell'equazione:

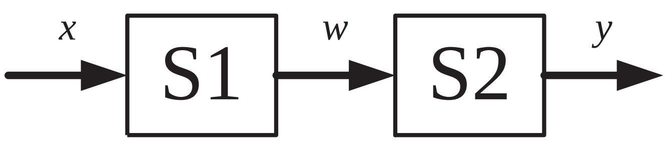
$$|H(f)| = 1$$

che, per entrambi i sistemi, dà:

$$f = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Questa frequenza è detta frequenza di guadagno unitario.

Sistemi in cascata



$$\begin{aligned} H(f) = |H(f)|\, e^{j\angle H(f)} &= H_1(f) \cdot H_2(f) \\ &= |H_1(f)|\, e^{j\angle H_1(f)} \cdot |H_2(f)|\, e^{j\angle H_2(f)} \\ &= |H_1(f) H_2(f)|\, e^{j(\angle H_1(f) + \angle H_2(f))} \end{aligned}$$

Quindi:

$$H_{\mathrm{dB}} = H_{1,\mathrm{dB}} + H_{2,\mathrm{dB}} \quad \text{e} \quad \angle H = \angle H_1 + \angle H_2$$

Poli e zeri (1/2)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots + \alpha_M s^M}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \cdots + \beta_N s^N}$$

L'**ordine** del sistema è $\max(M, N)$: nel dominio del tempo, il sistema è descritto da un'equazione differenziale di ordine $\max(M, N)$.

I valori di s per cui si annulla il numeratore di $H(s)$ sono detti zeri; quelli per cui si annulla il denominatore sono detti poli.
Poli e zeri possono essere reali, oppure complessi coniugati (a coppie).

Poli e zeri (2/2)

Ogni zero della funzione di trasferimento introduce un cambio di pendenza di $+20$ dB/decade.

Ogni polo della funzione di trasferimento introduce un cambio di pendenza di -20 dB/decade.

Il diagramma di Bode del modulo di $H(f)$ può presentare le pendenze:
$0, \pm 20$ dB/decade, ± 40 dB/decade, ± 60 dB/decade, ...

È impossibile avere una pendenza infinita (tratto verticale nel diagramma di Bode).

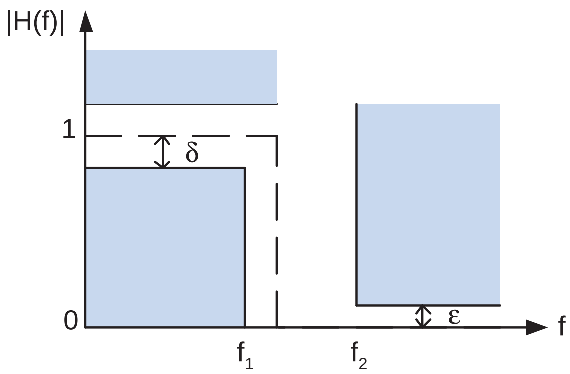
Filtri causali

Un filtro **ideale** (con risposta in frequenza rettangolare) è **fisicamente irrealizzabile** perché **non causale**: infatti la sua risposta impulsiva nel tempo è la funzione sinc (antitrasformata della funzione rettangolo), che è $\neq 0$ per quasi $\forall t \in (-\infty, +\infty)$. Il filtro ideale, non avendo la risposta impulsiva $h(t)$ identicamente nulla per $t < 0$, viola il principio causa-effetto.

Per lo stesso motivo, sono irrealizzabili tutti i filtri con risposta in frequenza nulla in una banda continua di frequenze.

Quindi, un filtro causale può avere $H(f) = 0$ solo per un numero discreto di frequenze.

Maschera di un filtro



Specifiche:

- $[0, f_1]$ = banda passante con “ripple” δ; $1 - \delta < |H| < 1 + \delta$
- $[f_2, \infty)$ = banda oscura con attenuazione ε: $|H| < \varepsilon$
- $[f_1, f_2]$ = banda di transizione: H qualsiasi