Teoria dei Segnali – Modulazione di frequenza e modulazione di fase

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Teoria dei Segnali – Modulazione di frequenza e di fase – 29 novembre 2010

Contenuto

1. Modulazione di angolo (generica)
2. Modulazione di fase
3. Frequenza istantanea di un segnale modulato in fase
4. Modulazione di frequenza
5. Spettro del segnale modulato in frequenza
6. Uso della modulazione di frequenza

Modulazione di “angolo”

- Nella modulazione di ampiezza, l’ampiezza (istantanea) del segnale modulato è proporzionale all’ampiezza della modulante.
- Nelle modulazioni di frequenza e di fase, l’ampiezza del segnale modulato è costante; variano o la frequenza (istantanea) o la fase (istantanea) del segnale modulato.
  In entrambi i casi, la modulante cambia l’argomento (cioè l’angolo) della sinusoide portante.
  - Modulazione di frequenza:
    $y(t) = \cos(2\pi f(t)t)$, con $f(t) = F(m(t))$
  - Modulazione di fase:
    $y(t) = \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$, con $\varphi(t) = \Phi(m(t))$

Modulazione di fase (PM) (1/2)

Il caso più semplice è la modulazione di fase (PM = phase modulation), in cui la fase è proporzionale all’ampiezza istantanea della modulante:

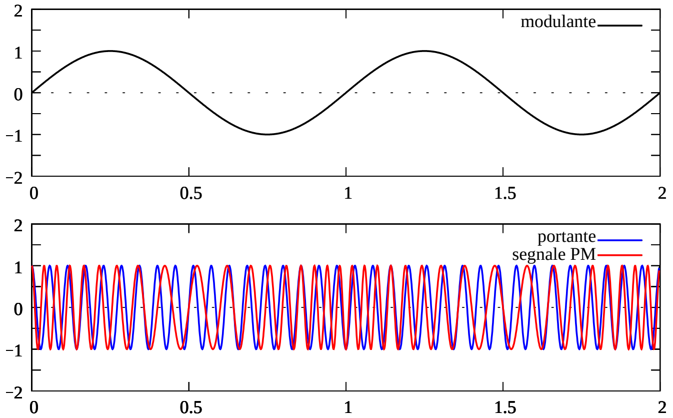
$$\Phi(m(t)) = k_\varphi m(t)$$

Il segnale modulato $\cos(2\pi f_c t + k_\varphi m(t))$ è anticipato o ritardato rispetto alla portante.

$\Phi(m(t))$ è la deviazione istantanea di fase. La deviazione massima di fase è il massimo valore assoluto che $\Phi(m(t))$ assume al variare di t.

Modulazione di fase (PM) (2/2)

modulante: $m(t) = \sin 2\pi f_1 t$; portante: $p(t) = \cos 2\pi f_c t$
segnale PM: $y(t) = \cos(2\pi f_c t + k_\varphi \sin 2\pi f_1 t)$



Per $m(t) > 0$ gli attraversamenti dello zero di $y(t)$ sono in *anticipo* rispetto a $p(t)$; per $m(t) < 0$ gli attraversamenti dello zero di $y(t)$ sono in *ritardo* rispetto a $p(t)$.

Frequenza istantanea del segnale PM

La frequenza istantanea del segnale PM è:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(2\pi f_c t + k_\varphi m(t)) = f_c + \frac{k_\varphi}{2\pi}\frac{d}{dt}m(t)$$

$f(t)$ varia in modo proporzionale alla derivata della modulante:

- quando $m(t)$ aumenta, $f(t) > f_c$
- quando $m(t)$ diminuisce, $f(t) < f_c$

Modulazione di fase e di frequenza

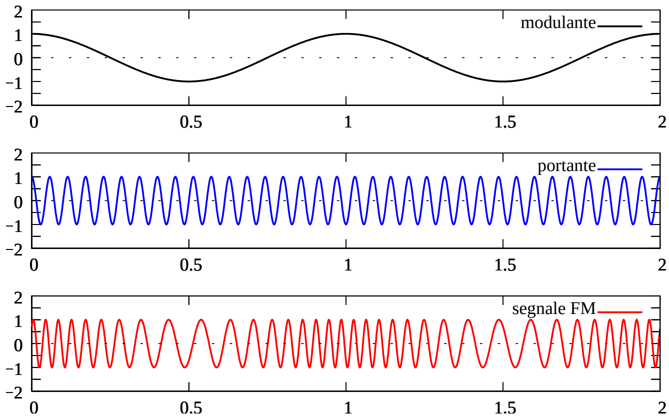
$$f(t) = f_c + \frac{k_\varphi}{2\pi}\frac{d}{dt}m(t)$$

Una variazione istantanea della fase comporta anche una variazione della frequenza, che è la derivata della fase.

- È impossibile modulare la fase senza modulare contemporaneamente anche la frequenza, e viceversa.
- La modulazione di fase con $m(t)$ è equivalente alla modulazione di frequenza con $\frac{d}{dt}m(t)$.
- La modulazione di frequenza con $m(t)$ è equivalente alla modulazione di fase con $\int m(t)\,dt$.

Modulazione di frequenza (FM)

modulante: $m(t) = \cos 2\pi f_1 t$; portante: $p(t) = \cos 2\pi f_c t$
segnale FM: $y(t) = \cos(2\pi f_c t + k_\varphi \sin 2\pi f_1 t)$



Quando $m(t) > 0$ gli attraversamenti dello zero di $y(t)$ sono più frequenti; quando $m(t) < 0$ gli attraversamenti dello zero di $y(t)$ sono meno frequenti.

Indice di modulazione

Per una modulante sinusoidale $m(t) = \cos 2\pi f_1 t$, il segnale modulato $y(t) = \cos(2\pi f_c t + k_\varphi \sin 2\pi f_1 t)$ ha una frequenza istantanea

$$f(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(k_\varphi \sin 2\pi f_1 t) = f_c + k_\varphi f_1 \cos 2\pi f_1 t$$

La deviazione istantanea di frequenza Δf del segnale FM è:

$$\Delta f(t) = f(t) - f_c = k_\varphi f_1 \cos 2\pi f_1 t$$

La deviazione massima di frequenza Δf_{max} è:

$$\Delta f_{\text{max}} = k_\varphi f_1$$

e k_φ è detto indice di modulazione.

Spettro del segnale FM (1/3)

Ricordando che $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$, si può esprimere il segnale FM come:

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(2\pi f_c t + k_\varphi \sin 2\pi f_1 t) \\ &= \cos 2\pi f_c t \cdot \cos(k_\varphi \sin 2\pi f_1 t) - \sin 2\pi f_c t \cdot \sin(k_\varphi \sin 2\pi f_1 t) \end{aligned}$$

La funzione $\cos(k_\varphi \sin 2\pi f_1 t)$ è pari e periodica con frequenza fondamentale f_1; quindi può essere sviluppata in serie di Fourier con i soli termini pari:

$$\begin{aligned} \cos(k_\varphi \sin 2\pi f_1 t) = {} & J_0(k_\varphi) + 2J_2(k_\varphi)\cos 4\pi f_1 t + 2J_4(k_\varphi)\cos 8\pi f_1 t \\ & + \ldots + 2J_{2n}(k_\varphi)\cos 4n\pi f_1 t + \ldots \end{aligned}$$

La funzione $\sin(k_\varphi \sin 2\pi f_1 t)$ è dispari e periodica con frequenza fondamentale f_1; quindi può essere anch'essa sviluppata in serie di Fourier con i soli termini dispari:

$$\begin{aligned} \sin(k_\varphi \sin 2\pi f_1 t) = {} & 2J_1(k_\varphi)\sin 2\pi f_1 t + 2J_3(k_\varphi)\sin 6\pi f_1 t \\ & + \ldots + 2J_{2n-1}(k_\varphi)\sin 2(2n-1)\pi f_1 t + \ldots \end{aligned}$$

Spettro del segnale FM (2/3)

$$y(t) = \cos 2\pi f_c t \cdot \cos(k_\varphi \sin 2\pi f_1 t) - \sin 2\pi f_c t \cdot \sin(k_\varphi \sin 2\pi f_1 t)$$

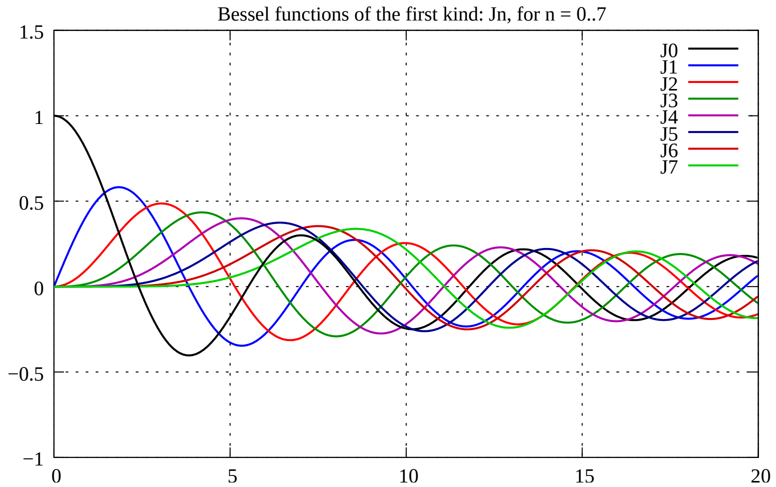
Moltiplicando $\cos 2\pi f_c t$ e $\sin 2\pi f_c t$ per i due sviluppi in serie di Fourier, e ricordando che $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$ e $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$, si ottiene:

$$\begin{aligned} y(t) = {} & J_0(k_\varphi)\cos 2\pi f_c t \\ & - J_1(k_\varphi)(\cos 2\pi(f_c - f_1)t - \cos 2\pi(f_c + f_1)t) \\ & + J_2(k_\varphi)((\cos 2\pi(f_c - 2f_1)t + \cos 2\pi(f_c + 2f_1)t) \\ & - J_3(k_\varphi)((\cos 2\pi(f_c - 3f_1)t - \cos 2\pi(f_c + 3f_1)t) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Funzioni di Bessel

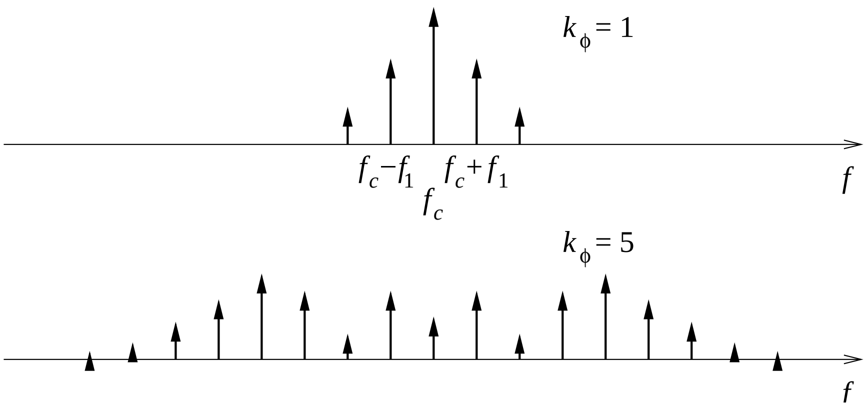
Le $J_n(x)$ sono le funzioni di Bessel (del primo tipo), e costituiscono le soluzioni dell'equazione di Bessel:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - n^2\right) y = 0$$



Spettro del segnale FM (3/3)

Lo spettro del segnale FM contiene tutte le frequenze $f_c \pm nf_1$; le ampiezze tendono a zero all'aumentare di n, ma al crescere dell'indice di modulazione k_φ tendono a zero più lentamente.



Nella pratica, la banda del segnale FM è: $B = 2\,(k_\varphi + 1)\, f_1$ (B contiene il 98% della potenza trasmessa).

Uso della modulazione di frequenza

La modulazione di frequenza

- si ottiene con un oscillatore controllato in tensione (VCO)
- si può demodulare con un phase-locked loop (PLL)
- è una modulazione ad inviluppo costante: poiché il segnale modulante fa variare frequenza (e fase) del segnale FM, le fluttuazioni dell'ampiezza dovute a ostacoli non peggiorano la qualità del segnale
  $\longrightarrow$ è adatta alle telecomunicazioni mobili
- viene usata nelle trasmissioni radiofoniche FM, con 88 MHz $\leq f_c \leq$ 108 MHz, e in passato veniva usata per il segnale audio nella televisione analogica (PAL); è stata usata anche per la telefonia mobile di prima generazione (TACS = Total Access Communication System) negli anni '80