Teoria dei Segnali – Introduzione ai processi stocastici

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Teoria dei Segnali – Introduzione ai processi stocastici – 13 dicembre 2010

Contenuto

Funzione cumulativa di distribuzione

La **funzione cumulativa di distribuzione** $F_X(x)$ della variabile aleatoria $X(\zeta)$ è la probabilità che $X(\zeta)$ abbia un valore minore o uguale a x:

$$F_X(x) = \Pr\{X \leq x\}$$

Proprietà:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $F_X(-\infty) = 0$
- $F_X(+\infty) = 1$
- monotonicità: $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ se $x_1 < x_2$

Funzione densità di probabilità

La **funzione densità di probabilità** $f_X(x)$ è la derivata della funzione cumulativa di distribuzione; di solito si indica con l'abbreviazione **pdf** (= probability density function).

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Proprietà:

- $f_X(x) \geq 0$ per $\forall x$. Poiché $F_X(x)$ è monotona non decrescente, la sua derivata è non negativa.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$. Infatti: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X dx = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1 - 0 = 1$.
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$

Media

La **media** o **valor medio** o **valore atteso** (*Expected value*) della variabile aleatoria $X(\zeta)$ si indica di solito con $m_X \equiv E(X(\zeta))$.

- Se la variabile casuale X è discreta:

$$m_X \equiv E(X(\zeta)) = \sum_i x_i \Pr\{X = x_i\}$$

- Se la variabile casuale X è continua, alla probabilità $\Pr\{X = x_i\}$ si sostituisce $f_X(x)dx$ e alla sommatoria si sostituisce l'integrale:

$$m_X \equiv E(X(\zeta)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Momenti di ordine superiore

- In generale, se applichiamo una funzione $g()$ alla variabile casuale $X(\zeta)$, il valor medio o valore atteso di $g(X(\zeta))$ è:

$$E\left(g(X(\zeta))\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- Se $g(X) = X^n$ (elevamento a potenza n-esima), allora $E(X^n)$ prende il nome di *momento n-esimo* di X.
- La media è il *primo momento*.

Varianza

La **varianza** σ_X^2 è il *secondo momento* della differenza tra X e $E(X)$:

$$\sigma_X^2 \equiv E\left((X - E(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx$$

Poiché $(x - m_X)^2 = x^2 - 2xm_X + m_X^2$, risulta:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E(X^2) - 2E(X)m_X + m_X^2 = E(X^2) - 2m_X^2 + m_X^2 = \\ &= E(X^2) - m_X^2\end{aligned}$$

e, se $m_X = 0$,

$$\sigma_X^2 = E(X^2)$$

Deviazione standard

La quantità σ_X (cioè la radice quadrata della varianza) è la *deviazione standard* di X:

$$\sigma_X = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx}$$

ed è anche il valore quadratico medio (rms) di $(X - m_X)$.

Rumore

In ogni sistema reale di comunicazione, il segnale trasmesso arriva al ricevitore più o meno degradato a causa di disturbi e rumore, che variano nel tempo in modo impredicibile.
Il rumore nei circuiti elettronici è dovuto al movimento casuale degli elettroni, che si muovono non solo per effetto dei campi elettrici applicati, ma anche (e soprattutto) a causa dell'*agitazione termica*. A temperatura ambiente (300 K) la velocità di agitazione termica per un elettrone è di circa 100 km/s, mentre la velocità di deriva dovuta ai campi elettrici è molto inferiore.
L'agitazione termica è a media nulla, ma provoca fluttuazioni nei valori istantanei delle grandezze elettriche (rumore termico).

Processo stocastico (1/5)

Per analizzare l'effetto del rumore si usano tecniche statistiche (teoria delle probabilità e dei processi stocastici).

Il rumore è un **processo stocastico**; l'aggettivo **stocastico** è l'opposto di **deterministico**:

- un segnale deterministico può essere espresso matematicamente come una funzione del tempo: $x(t)$ assume un ben preciso valore (e uno solo) per ogni t
- un segnale stocastico assume valori non noti a priori e non predicibili con esattezza; non si può rappresentare come una funzione ben definita nel tempo

"Stocastico" deriva dal verbo greco στοχάζομαι (stochazomai) = *cercare di capire*.

H.G. Liddell, R. Scott, *Dizionario Illustrato Greco-Italiano.* Le Monnier, Firenze, 1975.

Processo stocastico (2/5)

Formalmente, un **processo stocastico** X è una funzione di una variabile casuale ζ e del tempo t:

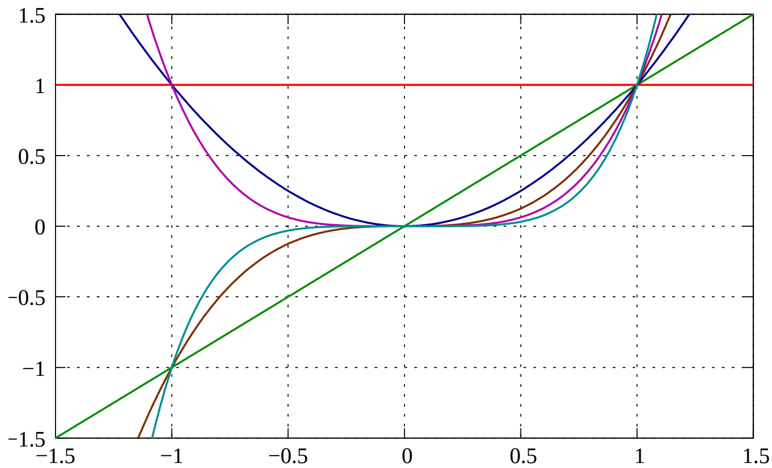
$$X(\zeta, t)$$

Si può pensare al processo stocastico come ad un **insieme di funzioni del tempo**, dipendenti, oltre che da t, da un parametro ζ; di queste funzioni **una sola** viene estratta di volta in volta, in modo corrispondente al risultato ζ di un esperimento casuale.

Un processo stocastico può essere continuo oppure discreto rispetto al tempo t. Inoltre, la variabile casuale ζ può essere continua o discreta.

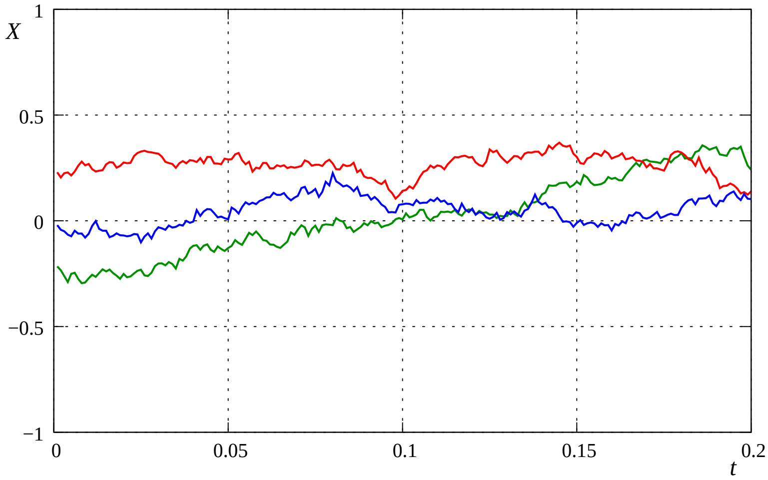
Processo stocastico (3/5)

Esempio 1. Consideriamo l'insieme di funzioni $X(\zeta, t) = t^{\zeta-1}$, e associamo al parametro ζ il risultato del lancio di un dado ($\zeta = 1, \ldots, 6$). Questo è un processo stocastico tempo-continuo e con variabile casuale discreta.



Processo stocastico (4/5)

Esempio 2.
Rumore con p.d.f. gaussiana, passato attraverso un filtro accumulatore:



Processo stocastico (5/5)

Esempio 3. Una fabbrica produce trasformatori che, idealmente, dovrebbero avere coefficiente di accoppiamento = 1. Nella realtà, tutti i trasformatori hanno perdite, e risulta che il coefficiente di accoppiamento è minore di 1 (di una quantità casuale). Applicando all'avvolgimento primario una tensione $v_1(t) = V_0 \cos 2\pi ft$, si ha ai capi dell'avvolgimento secondario la tensione

$$v_2(t) = \zeta V_0 \cos 2\pi ft$$

con $0 < \zeta < 1$.
Pur avendo un andamento regolare (periodico), la tensione $v_2(t)$ è un processo stocastico: il valore istantaneo di v_2 dipende da quale trasformatore è stato scelto a caso nel lotto di produzione.

Funzione cumulativa di distribuzione

All'istante di tempo $t = t_1$, il valore del processo stocastico $X(\zeta, t)$ è la variabile casuale $X(\zeta, t_1)$. Questa variabile casuale assume un valore non noto a priori; tuttavia si possono definire alcune proprietà statistiche di $X(\zeta, t_1)$.

- **Funzione cumulativa di distribuzione**: $F_X(x; t_1) \equiv \Pr\{X(\zeta, t_1) \leq x\}$ è la probabilità che, per $t = t_1$, il processo stocastico $X(\zeta, t)$ assuma un valore istantaneo minore o uguale a x.
  Proprietà:
  - $0 \leq F_X(x; t_1) \leq 1$
  - $F_X(-\infty; t_1) = 0$
  - $F_X(+\infty; t_1) = 1$
  - monotonicità: $F_X(x_1; t_1) \leq F_X(x_2; t_1)$ se $x_1 < x_2$

Funzione densità di probabilità

- **Funzione densità di probabilità**:

$$f_X(x; t_1) = \frac{d}{dx} F_X(x; t_1)$$

  è la derivata della funzione cumulativa di distribuzione; di solito si indica con l'abbreviazione **pdf** (= probability density function). Proprietà:
  - $f_X(x; t_1) \geq 0$ per $\forall x$. Poiché $F_X(x; t_1)$ è monotona non decrescente, la sua derivata è non negativa.
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x; t_1) dx = 1$. Infatti: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X dx = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1 - 0 = 1$.
  - $F_X(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x; t_1) dx$

Media

- **Media** o valor medio o valore atteso (*Expected value*): $m_X(t_1) \equiv E(X(\zeta, t_1))$
  - Se la variabile casuale ζ è discreta:

$$m_X(t_1) \equiv E(X(\zeta, t_1)) = \sum_i x_i(t_1) \Pr(x_i(t_1))$$

  - Se la variabile casuale ζ è continua, alla probabilità $\Pr(x_i(t_1))$ si sostituisce $f_X(x; t_1)dx$ e alla sommatoria si sostituisce l'integrale:

$$m_X(t_1) \equiv E(X(\zeta, t_1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x; t_1) dx$$

Momenti di ordine superiore

- In generale, se applichiamo una funzione $g()$ alla variabile casuale $X(\zeta, t_1)$, il valor medio o valore atteso di $g(X(\zeta, t_1))$ è:

$$E\left(g(X(\zeta, t_1))\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x; t_1) dx$$

- Se $g(X) = X^n$ (elevamento a potenza n-esima), allora $E(X^n)$ prende il nome di *momento n-esimo* di X.
- La media è il *primo momento*.

Stazionarietà

Nel caso più generale, il calcolo dei momenti di un processo stocastico $X(\zeta, t)$ richiede di tenere conto del tempo t.
Alcuni processi, invece, hanno proprietà statistiche **indipendenti dal tempo**.

Un processo stocastico si dice **stazionario** (in senso stretto) quando tutti i suoi momenti sono **indipendenti dal tempo** t.

Se la funzione densità di probabilità è indipendente dal tempo, allora il processo è stazionario (in senso stretto).

Ergodicità

La stazionarietà di un processo stocastico ne garantisce l'invarianza delle proprietà statistiche rispetto al tempo, ma non dice nulla sull'*equivalenza statistica* delle funzioni che compongono il processo.

Per alcuni processi, *tutte* le funzioni che compongono il processo sono tra loro equivalenti, nel senso che i momenti calcolati rispetto al tempo sono indipendenti dalla particolare funzione scelta a caso.
Un processo stocastico che gode di questa proprietà si dice **ergodico**: la statistica dell'intero processo può essere ottenuta dalle *medie temporali calcolate su una sola funzione del processo*.

Distribuzione del secondo ordine

Da qui in poi, per semplificare la notazione matematica dei processi stocastici, si sottintende la variabile aleatoria ζ; i processi stocastici sono indicati con lettere MAIUSCOLE dell'alfabeto.

Consideriamo il processo stocastico $X(t)$ e **due** istanti di tempo t_1 e t_2.
Abbiamo le **due** variabili casuali $X(t_1)$ e $X(t_2)$; indichiamo la loro distribuzione mista o distribuzione del secondo ordine con

$$F_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) \equiv \Pr\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

Densità di probabilità del secondo ordine

La corrispondente funzione densità di probabilità del secondo ordine è:

$$f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ è la derivata seconda mista della funzione cumulativa di distribuzione $F_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2)$.

Distribuzione e densità incrociate

Se consideriamo **due** processi stocastici $X(t)$ e $Y(t)$ e **due** istanti di tempo t_1 e t_2, abbiamo le due variabili casuali $X(t_1)$ e $Y(t_2)$.
Possiamo definire

- la distribuzione incrociata:

$$F_{XY}(x, y; t_1, t_2) \equiv \Pr\{X(t_1) \leq x, Y(t_2) \leq y\}$$

- la densità di probabilità incrociata:

$$f_{XY}(x, y; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y; t_1, t_2)}{\partial x \partial y}$$

che è la derivata seconda mista della funzione di distribuzione incrociata $F_{XY}(x, y; t_1, t_2)$.

Crosscorrelazione e autocorrelazione

La crosscorrelazione (o correlazione incrociata, o semplicemente correlazione) di due processi stocastici $X(t)$ e $Y(t)$ è:

$$R_{XY}(t_1, t_2) \equiv E(X(t_1)Y(t_2)) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y; t_1, t_2) dx dy$$

L'autocorrelazione di un processo stocastico $X(t)$ è:

$$R_{XX}(t_1, t_2) \equiv E(X(t_1)X(t_2)) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Crosscovarianza e autocovarianza

La crosscovarianza (o covarianza incrociata, o semplicemente covarianza) di due processi stocastici $X(t)$ e $Y(t)$ è:

$$C_{XY}(t_1,t_2) \equiv E((X(t_1)-m_X(t_1))(Y(t_2)-m_Y(t_2))) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X(t_1))(y-m_Y(t_2))f_{XY}(x,y;t_1,t_2)dxdy$$

L'autocovarianza di un processo stocastico $X(t)$ è:

$$C_{XX}(t_1,t_2) \equiv E((X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_X(t_1))(x_2-m_X(t_2))f_{XX}(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

Autocovarianza e autocorrelazione

$$C_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$