Teoria dei Segnali – Covarianza, correlazione e densità spettrale di potenza; processi stocastici stazionari

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Teoria dei Segnali – Covarianza, correlazione e p.s.d.; p.s. stazionari –
10 gennaio 2011

Contenuto

Crosscorrelazione

La densità di probabilità incrociata

$$f_{XY}(x, y; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y; t_1, t_2)}{\partial x \partial y}$$

è importante perché entra nel calcolo della **correlazione** e della **covarianza** tra processi stocastici.
La **crosscorrelazione** (o **correlazione incrociata**, o semplicemente **correlazione**) di due processi stocastici $X(t)$ e $Y(t)$ è il valor medio del prodotto delle v.a. $X(t_1)Y(t_2)$:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &\equiv E(X(t_1)Y(t_2)) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y; t_1, t_2) dx dy \end{aligned}$$

Autocorrelazione

L'**autocorrelazione** di un processo stocastico $X(t)$ è la correlazione di $X(t)$ con sé stesso:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &\equiv E(X(t_1)X(t_2)) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Crosscovarianza e autocovarianza

La **crosscovarianza** (o **crosscovarianza incrociata**, o semplicemente **covarianza**) di due processi stocastici $X(t)$ e $Y(t)$ è la correlazione delle differenze tra i processi e i loro valori medi:

$$C_{XY}(t_1, t_2) \equiv E((X(t_1) - m_X(t_1))(Y(t_2) - m_Y(t_2))) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X(t_1))(y - m_Y(t_2)) f_{XY}(x, y; t_1, t_2) dx dy$$

L'**autocovarianza** di un processo stocastico $X(t)$ è:

$$C_{XX}(t_1, t_2) \equiv E((X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_X(t_1))(x_2 - m_X(t_2)) f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Autocovarianza e autocorrelazione

Dal confronto tra le definizioni di $C_{XX}(t_1, t_2)$ e $R_{XX}(t_1, t_2)$, si vede immediatamente che:

$$C_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2)$$

Stazionarietà in senso stretto

Un processo stocastico si dice **stazionario** (in senso stretto) quando tutti i suoi momenti sono **indipendenti dal tempo** t.

Se tutte le funzioni densità di probabilità, per qualsiasi ordine n, sono indipendenti dal tempo, allora il processo è stazionario (in senso stretto).

$$\begin{aligned} & f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t, \ldots, t_n + \Delta t) = \\ & \qquad = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \quad \text{per } \forall n, \forall \Delta t \end{aligned}$$

Stazionarietà di ordine n

Un processo stocastico si dice **stazionario di ordine** n quando tutti i suoi momenti di ordine $k \leq n$ sono **indipendenti dal tempo** t.

Se le funzioni densità di probabilità per tutti gli ordini $k \leq n$ sono indipendenti dal tempo, allora il processo è stazionario di ordine n.

$$\begin{aligned} & f_X(x_1, x_2, \ldots, x_k; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t, \ldots, t_k + \Delta t) = \\ & \qquad = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_k; t_1, t_2, \ldots, t_k) \quad \text{per } \forall k \leq n, \forall \Delta t \end{aligned}$$

Stazionarietà in senso lato

In generale, la stazionarietà in senso stretto è una proprietà difficile da verificare (tranne che per pochi processi).
Di conseguenza, ci si accontenta di una definizione **meno restrittiva**.

Un processo stocastico si dice **stazionario in senso lato** quando la media è indipendente dal tempo t e l'autocorrelazione dipende solo dalla differenza $\tau = t_1 - t_2$:

$$m_X(t) = m_X$$
$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2) = R_{XX}(\tau)$$

Covarianza di p.s. stazionari

Per tutti i processi stocastici stazionari (almeno in senso lato), m_X non dipende da t e R_{XX} dipende solo da $\tau = t_1 - t_2$.
Di conseguenza l'autocovarianza del processo stocastico $X(t)$ è:

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= R_{XX}(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2) \\ &= R_{XX}(\tau) - m_X^2 \\ &= C_{XX}(\tau) \end{aligned}$$

e quindi anche l'autocovarianza dipende solo da $\tau = t_1 - t_2$.
In modo analogo, si ricava la crosscovarianza di di due processi stocastici stazionari $X(t)$ e $Y(t)$:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - m_X m_Y$$

Densità spettrale di potenza (1/2)

Per tutti i processi stocastici stazionari (almeno in senso lato) si definisce la **densità spettrale di potenza** $S_{XX}(f)$, che è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione $R_{XX}(\tau)$:

$$S_{XX}(f) = \mathcal{F}(R_{XX}(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

Densità spettrale di potenza (2/2)

La densità spettrale di potenza incrociata $S_{XY}(f)$ di due processi stocastici stazionari $X(t)$ e $Y(t)$ è: la trasformata di Fourier della crosscorrelazione $R_{XY}(\tau)$:

$$S_{XY}(f) = \mathcal{F}(R_{XY}(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

Bisogna ricordare che $R_{XY}(\tau) = R^*_{YX}(-\tau)$; di conseguenza, nel caso generale, $S_{XY}(f) \neq S_{YX}(f)$.
Si ha l'uguaglianza delle due densità spettrali di potenza incrociate $S_{XY}(f) = S_{YX}(f)$ solo se $R_{XY}(\tau)$ è reale e pari.

Proprietà

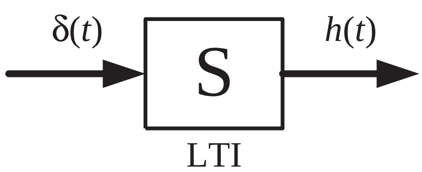
- Somma di due p.s.: $Z(t) = X(t) + Y(t)$
  L'autocorrelazione è:

$$R_{ZZ}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_{YY}(\tau)$$

- Prodotto di due p.s.: $Z(t) = X(t) \cdot Y(t)$
  In generale, l'autocorrelazione $R_{ZZ}(\tau)$ **non può** essere espressa come combinazione delle correlazioni.
  Tuttavia, se $X(t)$ e $Y(t)$ sono tra loro **indipendenti**, allora

$$R_{ZZ}(\tau) = R_{XX}(\tau) \cdot R_{YY}(\tau)$$

Filtraggio



Applicando all'ingresso di un sistema LTI il processo stocastico $X(t)$, l'uscita è il processo stocastico $Y(t)$ dato da:

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

Media di un p.s. filtrato

Il valor medio di $Y(t)$ è:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(X(t-\tau)) \cdot h(\tau)\, d\tau \\
&= E(X) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, d\tau \\
&= E(X) \cdot H(0)
\end{aligned}
$$

Autocorrelazione di un p.s. filtrato

La correlazione incrociata tra $Y(t)$ e $X(t)$ è:

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau)$$

mentre

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h^*(-\tau)$$

e l'autocorrelazione dell'uscita è:

$$R_{YY}(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau) = R_{XX}(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau)$$

Spettro di potenza di un p.s. filtrato

Dalle relazioni tra le correlazioni, risulta:

$$S_{XY}(f) = S_{XX}(f) \cdot H^*(f)$$

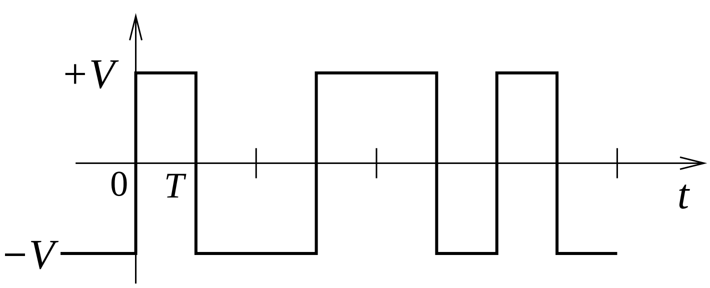
$$S_{YX}(f) = S_{XX}(f) \cdot H(f)$$

e quindi la densità spettrale di potenza di un processo stocastico filtrato è:

$$S_{YY}(f) = S_{XX}(f) \cdot \left|H(f)\right|^2$$

Trasmissione seriale di dati binari

La trasmissione di dati binari su una linea seriale può essere modellizzata con un processo stocastico.
Scegliendo a caso un file, abbiamo una successione di bit da trasmettere.
Nell'ipotesi che i bit 1 e 0 abbiano la stessa probabilità e siano fra loro indipendenti, se la durata di trasmissione del bit è T, il bit 1 viene codificato con un livello di tensione $+V$ e il bit 0 con un livello di tensione $-V$, una funzione campione del processo stocastico è:



Proprietà della trasmissione binaria (1/4)

Il processo stocastico è:

$$V(t) = V[n] \quad \text{per} \;\; nT \leq t < (n+1)T$$

$V[n]$ è una variabile aleatoria discreta, che può assumere i valori $+V$ e $-V$ (entrambi con probabilità $\frac{1}{2}$).
Vogliamo determinare:

- la densità di probabilità del primo ordine $f_V(v;t)$;
- il valor medio $m_V(t)$;
- l'autocorrelazione $R_{VV}(t_1,t_2)$.

Proprietà della trasmissione binaria (2/4)

La funzione cumulativa di distribuzione è:

$$F_V(v;t) = \begin{cases} 0 & \text{se } v < -V \\ \frac{1}{2} & \text{se } -V < v < +V \\ 1 & \text{se } v > +V \end{cases}$$

In forma compatta: $F_V(v;t) = \frac{1}{2}u(v+V) + \frac{1}{2}u(v-V)$
Derivando rispetto a v:

$$f_V(v;t) = \frac{1}{2}\delta(v+V) + \frac{1}{2}\delta(v-V)$$

che è indipendente da t
$\longrightarrow$ $V(t)$ è stazionario di ordine 1

Proprietà della trasmissione binaria (3/4)

Poiché $V(t)$ è un processo stazionario di ordine 1, il valor medio è costante:

$$\begin{aligned} m_V &= \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v;t) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v \left(\frac{1}{2}\delta(v+V) + \frac{1}{2}\delta(v-V) \right) dv \\ &= -\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = 0 \end{aligned}$$

Proprietà della trasmissione binaria (4/4)

Per il calcolo dell'autocorrelazione $R_{VV}(t_1, t_2)$, consideriamo separatamente due casi:

- t_1 e t_2 appartengono allo stesso intervallo n:

$$R_{VV}(t_1, t_2) = E((V(t_1)V(t_2)) = E((V[n])^2) = V^2$$

- t_1 e t_2 appartengono a due intervalli diversi k e n:

$$R_{VV}(t_1, t_2) = E((V(t_1)V(t_2)) = E(V[k]V[n]) = E(V[k])E(V[n]) = 0$$

Quindi l'autocorrelazione non dipende solo da $\tau = t_1 - t_2$, ma dipende sia da t_1 sia da t_2
$\longrightarrow$ $V(t)$ non è stazionario in senso lato.