# Teoria dei Segnali – Un esempio di processo stocastico: il rumore termico

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Teoria dei Segnali – Il rumore termico – 10 gennaio 2011



## Contenuto

## Rumore termico (1/8)

Il “rumore termico” (o “rumore bianco gaussiano”, o “rumore Johnson-Nyquist”) è presente in qualsiasi dispositivo elettronico, ed è causato dall’agitazione termica degli elettroni, che si muovono in direzione casuale con velocità elevata, e provocano fluttuazioni istantanee delle grandezze elettriche.
L’elevata velocità degli elettroni rende il valore istantaneo del rumore termico praticamente scorrelato dai valori precedenti. Anche se fosse possibile conoscere completamente l’andamento passato del rumore, sarebbe comunque impossibile predirne l’andamento futuro.
In prima approssimazione, l’autocorrelazione del rumore bianco è una delta di Dirac:

$$R_{NN}(\tau) = \xi\delta(\tau)$$



## Rumore termico (2/8)

Poiché $R_{NN}(\tau) = \xi\delta(\tau)$, la densità spettrale di potenza del rumore termico è costante:

$$S_{NN}(f) = \xi$$

e per questo motivo il rumore termico viene detto “bianco” (ricordare che la luce bianca è quella che contiene le componenti spettrali a tutte le frequenze).

## Rumore termico (3/8)

Nel caso di una resistenza $R$, il rumore termico si manifesta come una tensione casuale ai capi della resistenza (in serie a $R$); la tensione dovuta al rumore termico è variabile nel tempo e a media nulla.
La densità spettrale di potenza della tensione di rumore è:

$$S_{NN}(f) = 2kTR$$

dove:

- $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K è la costante di Boltzmann
- $T$ è la temperatura assoluta (in kelvin)
- $R$ è il valore della resistenza (in ohm)



## Rumore termico (4/8)

Nella realtà, la densità spettrale di potenza non può essere costante a tutte le frequenze (la potenza totale risulterebbe infinita, e questo è fisicamente impossibile).
Dalla meccanica quantistica, si ricava:

$$S_{NN}(f) = 2kTR \frac{|f|/f_0}{\exp(|f|/f_0) - 1}$$

con

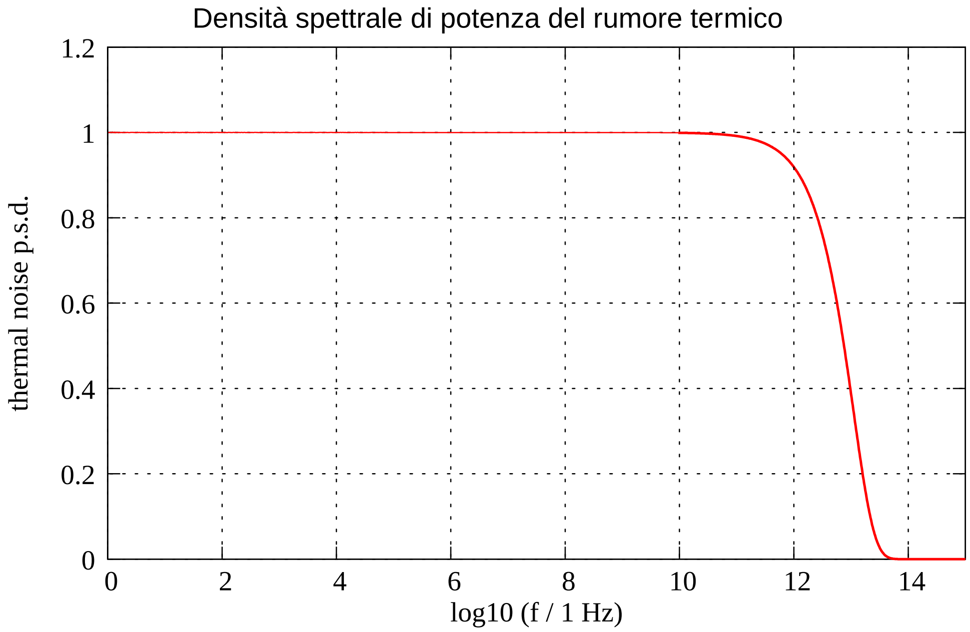
$$f_0 = \frac{kT}{h}$$

dove

- $h = 6.6256 \cdot 10^{-34}$ J s è la costante di Planck

A temperatura ambiente, $f_0 \approx 6$ THz (cioè 6000 GHz)!

## Rumore termico (5/8)






## Rumore termico (6/8)

In pratica, il valore rms della tensione di rumore bianco è:

$$V_{n,\mathrm{rms}} = \sqrt{4kTBR}$$

$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K (costante di Boltzmann)
$T$ = temperatura assoluta (in kelvin)
$B$ = banda del rumore
$R$ = resistenza

Nota: la costante 4 (invece che 2) è dovuta al fatto che la potenza normalizzata viene calcolata solo sulla banda di frequenze **positive**: essendo l'autocorrelazione $R_{NN}(\tau)$ reale e pari, anche la densità spettrale di potenza $S$ è reale e pari; quindi si può integrare $S_{NN}(f)$ da 0 a $+\infty$ e moltiplicare per 2.

## Rumore termico (7/8)

Poiché il rumore termico è dovuto a moltissimi elettroni che si agitano in modo indipendente gli uni dagli altri, per il **teorema del limite centrale** la distribuzione di ampiezza è gaussiana, con media nulla e valore rms $\sigma$.
La funzione densità di probabilità è:

$$f(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}}$$

Ricordiamo che $f(v)dv$ è la probabilità che l'ampiezza istantanea del rumore sia compresa nell'intervallo $[v, v + dv]$.



## Rumore termico (8/8)

**Fattore di cresta**: rapporto tra valore di picco e valore rms di un segnale.

Il rumore termico ha distribuzione di ampiezza gaussiana, con valor medio nullo.
Poiché la gaussiana si estende da $-\infty$ a $+\infty$, il fattore di cresta tende a infinito, ma con probabilità tendente a zero.

In pratica, per il rumore termico si può assumere un fattore di cresta pari a circa 4, trascurando i picchi che si verificano per meno dello 0.01% del tempo
$\longrightarrow$ osservando l'ampiezza del rumore con un oscilloscopio, il valore rms è dato da circa 1/8 dell'ampiezza picco-picco.

## Il rumore termico come processo normale

Un **processo stocastico normale** è descritto da una funzione densità di probabilità normale (gaussiana):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu_X)^2/(2\sigma^2)}$$

che, se $\mu_X = 0$, si riduce a:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Processi che coinvolgono un numero molto elevato di particelle fra loro indipendenti sono normali (teorema del limite centrale).



## Funzione cumulativa di distribuzione (1)

La funzione cumulativa di distribuzione del processo stocastico normale a media nulla:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

è:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx$$

e questo integrale non è esprimibile in termini di funzioni elementari.

## Funzione degli errori (1/2)

Si definisce **funzione degli errori (di Gauss)** la funzione erf$x$, definita come:

$$\mathrm{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Ovviamente, $\mathrm{erf}(0) = 0$ e $\mathrm{erf}(\infty) = 1$.

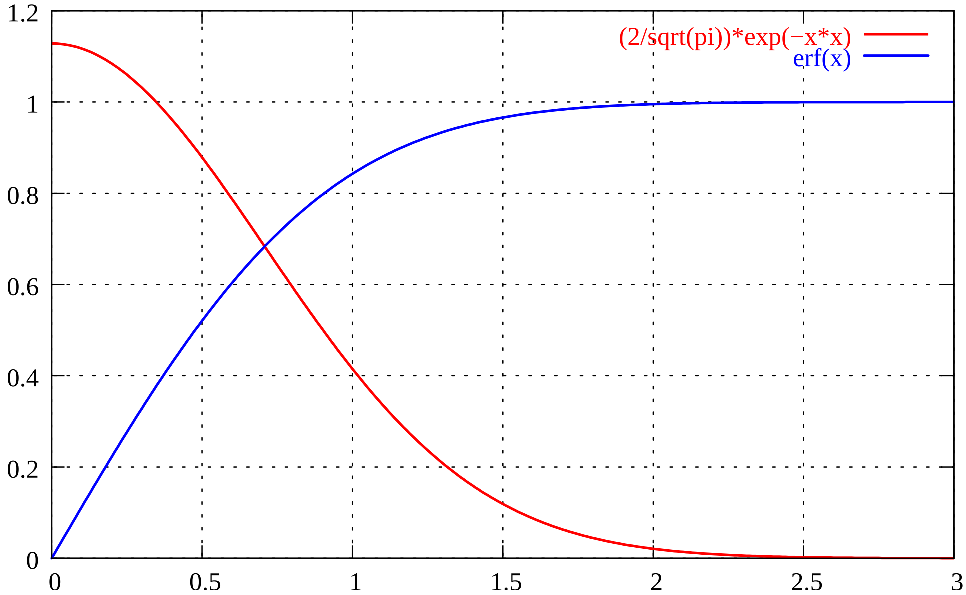
La **funzione complementare degli errori** è la funzione erfc$x$, definita come:

$$\mathrm{erfc}x = 1 - \mathrm{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du$$



## Funzione degli errori (2/2)

Gaussiana e funzione degli errori:



## Funzione cumulativa di distribuzione (2)

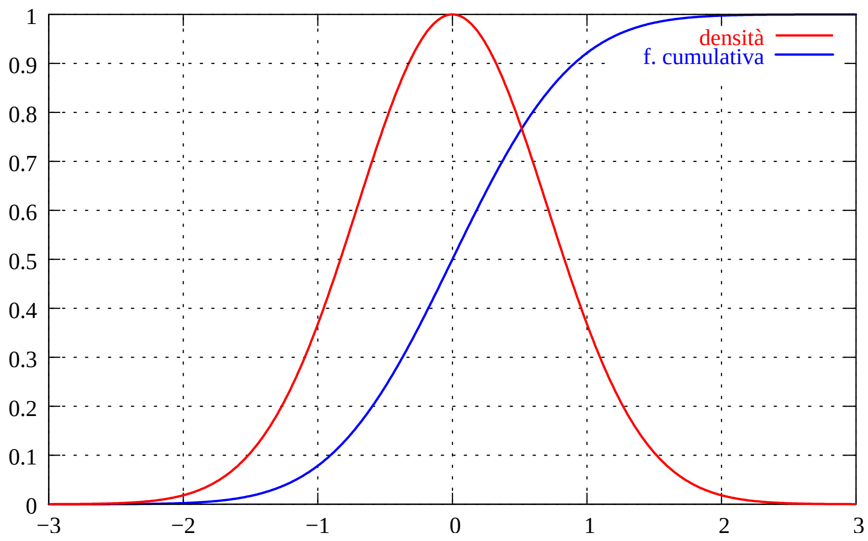
La funzione cumulativa di distribuzione del processo stocastico normale si può esprimere attraverso la funzione complementare degli errori:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx - \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2}\sigma}^{\infty} e^{-u^2}\,du\right) = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)
\end{aligned}
$$



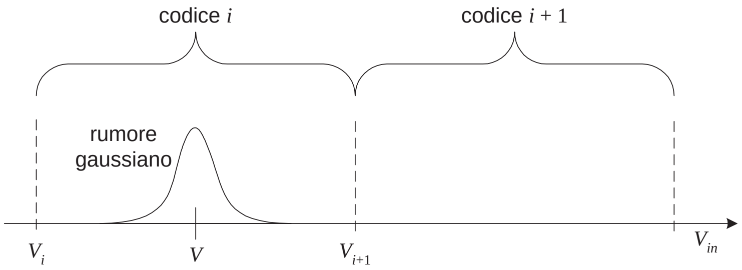
## Densità e funzione cumulativa (2/2)

Funzione densità di probabilità e funzione cumulativa di distribuzione di un processo stocastico normale:



# Rumore in ingresso a un ADC (1/4)

Ingresso analogico costante; rumore con distribuzione di ampiezza gaussiana.
Caso 1: valore di ingresso al centro di un intervallo di quantizzazione.

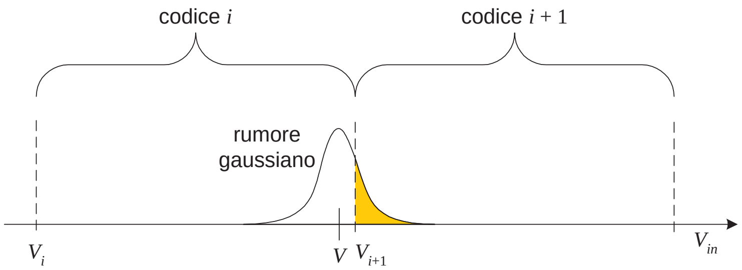



Se l'ampiezza del rumore è *minore* del passo di quantizzazione, la probabilità che il rumore influisca sul risultato della conversione è di solito trascurabile.



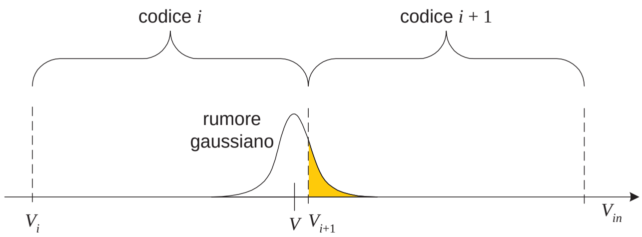
# Rumore in ingresso a un ADC (2/4)

Ingresso analogico costante; rumore con distribuzione di ampiezza gaussiana.
Caso 2: valore di ingresso vicino al bordo di un intervallo di quantizzazione.




Il rumore influisce con elevata probabilità sul risultato della conversione.

## Rumore in ingresso a un ADC (3/4)



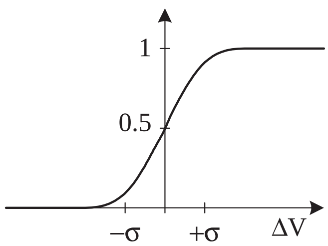

Se $\Delta V$ è la differenza tra il bordo superiore dell'intervallo $i$-esimo ($V_{i+1}$) e la tensione da convertire $V$, la probabilità che il risultato della conversione sia $i$ è:

$$F(\Delta V) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\Delta V} e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}} dv = \frac{1}{2}\left(1 + \text{erf}\left(\frac{\Delta V}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$



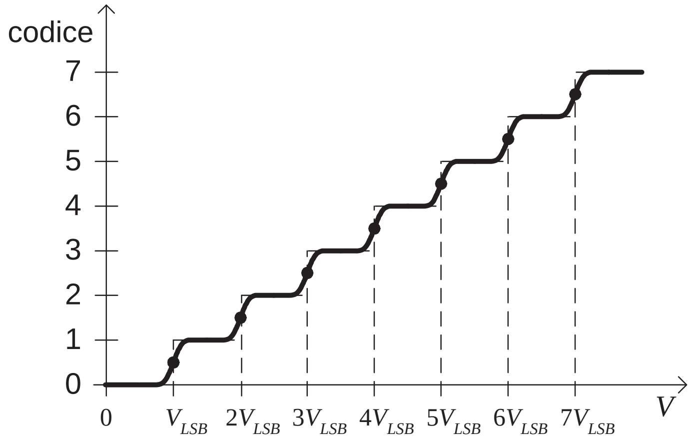
## Rumore in ingresso a un ADC (4/4)

$$F(\Delta V) = \frac{1}{2}\left(1 + \text{erf}\left(\frac{\Delta V}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$




La transizione tra due codici consecutivi non è deterministica, ma dipende dal rumore. Ripetendo la conversione della tensione costante $V$, si ottiene il codice $i$ con probabilità $F(\Delta V)$ e il codice $i+1$ con probabilità $1 - F(\Delta V)$.

## Caratteristica “probabilistica” di ADC




Il **livello di transizione** tra due codici consecutivi è il valore di tensione per cui i due codici sono equiprobabili (con probabilità 1/2 ciascuno).



## Bit error ratio (BER)

Nel caso di segnale binario, il rumore gaussiano ha una probabilità di far cambiare il valore del bit ricevuto. In assenza di filtraggio, se il bit decodificato è ottenuto da un campione istantaneo, si ha un **bit error ratio** (BER) dato da:

$$\mathrm{BER} = \mathrm{erfc}\left(\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

In un buon sistema di comunicazione, il BER deve essere minore di $10^{-9}$.

*Attenzione:* Spesso, anche nei libri e negli articoli, si fa confusione tra *bit error ratio* e *bit error rate*.

- Il bit error ratio è il rapporto tra il numero di bit sbagliati e il numero totale di bit (adimensionale).
- Il bit error rate è la frequenza temporale degli errori, cioè il numero di errori al secondo.

Con un BER pari a $10^{-9}$, su una linea di trasmissione a 1 Gbit/s, si ha un bit error rate pari a 1 $s^{-1}$ (un errore al secondo).