Teoria dei Segnali
Trasmissione binaria casuale; somma di processi stocastici

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Teoria dei Segnali – Trasmissione binaria casuale; somma di processi stocastici – 17 gennaio 2011

Contenuto

Segnale ritardato in modo casuale (1/4)

Un segnale deterministico $x(t)$, periodico con periodo T_0, viene ritardato di un tempo Θ non noto.
Questa situazione, tipica – ad esempio – di tutti i segnali di eco, può essere descritta dal processo stocastico:

$$X(t) = x(t - \Theta)$$

in cui la variabile casuale è il tempo di ritardo Θ.

Vogliamo calcolare la media e l'autocorrelazione di $X(t)$.

Segnale ritardato in modo casuale (2/4)

Il valor medio del processo stocastico

$$X(t) = x(t - \Theta)$$

calcolato rispetto al tempo di ritardo Θ, si ottiene partendo dalla relazione:

$$E(g(Z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f_Z(z) dz$$

Sostituiamo Θ a Z, $f_\Theta(\vartheta)$ a $f_Z(z)$, e $x(t - \vartheta)$ a $g(z)$, e integriamo solo sul periodo T_0, per cui la densità di probabilità (uniforme) risulta essere $f_\Theta(\vartheta) = \frac{1}{T_0}$.

Segnale ritardato in modo casuale (3/4)

Otteniamo il valor medio del processo stocastico $X(t)$:

$$E(X) = \int_0^{T_0} x(t-\vartheta)\frac{1}{T_0}d\vartheta = $$
$$= \frac{1}{T_0}\int_{t-T_0}^{t} x(\alpha)d\alpha$$

dove nell'ultimo passaggio è stata usata la sostituzione $\alpha = t - \vartheta$.
L'integrale ottenuto è la media temporale (sul periodo) del segnale deterministico $x(t)$, e quindi $E(X)$ è indipendente dal tempo.

Il processo stocastico $X(t)$ è **stazionario in valor medio**.

Segnale ritardato in modo casuale (4/4)

L'autocorrelazione del p.s. $X(t)$ si calcola in modo analogo:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E(x(t_1-\Theta)x(t_2-\Theta)) =$$
$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t_1-\vartheta)x(t_2-\vartheta)d\vartheta =$$
$$= \frac{1}{T_0}\int_{t-T_0}^{t} x(\alpha)x(\alpha+t_2-t_1)d\alpha$$

con la sostituzione $\alpha = t_1 - \vartheta$.
L'autocorrelazione di $X(t)$ dipende solo da $\tau = t_1 - t_2$, e coincide con l'autocorrelazione di $x(t)$:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(\tau) = R_x(\tau)$$

Il processo stocastico $X(t)$ è **stazionario in senso lato**.

Segnale binario casuale (1/5)

Consideriamo la trasmissione seriale di dati binari ritardata di un tempo Θ non noto:

$$X(t) = V(t - \Theta)$$

dove

$$V(t) = V[n] \quad \text{per} \quad nT \leq t < (n+1)T$$

con $V[n] = \pm V$.
Il processo stocastico $X(t)$ descrive matematicamente il segnale ricevuto da un ricevitore il cui segnale di clock è scorrelato rispetto al clock del trasmettitore.

Se i due valori $+V$ e $-V$ sono equiprobabili, il valor medio è $E(X) = 0$.

Segnale binario casuale (2/5)

Per il calcolo dell'autocorrelazione, osserviamo che si può scrivere $V(t)$ in questo modo:

$$V(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V[n] \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

perché la funzione $\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT-\frac{T}{2}}{T}\right)$ vale 1 nell'intervallo $(nT, (n+1)T)$, e 0 altrove.
Quindi si può scrivere:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V[n] \mathrm{rect}\left(\frac{t - \Theta - nT - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

Segnale binario casuale (3/5)

$$
\begin{aligned}
&R_{XX}(t_1,t_2) = \\
&\quad = E\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} V^2 \mathrm{rect}\left(\frac{t_1-\Theta-nT-\frac{T}{2}}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t_2-\Theta-nT-\frac{T}{2}}{T}\right)\right) = \\
&\quad = V^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t_1-\Theta-nT-\frac{T}{2}}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t_2-\Theta-nT-\frac{T}{2}}{T}\right)\right] = \\
&\quad = V^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{rect}\left(\frac{t_1-\vartheta-nT-\frac{T}{2}}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t_2-\vartheta-nT-\frac{T}{2}}{T}\right) d\vartheta = \\
&\quad = \frac{V^2}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{t-nT-T}^{t-nT} \mathrm{rect}\left(\frac{\alpha-\frac{T}{2}}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha-t_1+t_2-\frac{T}{2}}{T}\right) d\vartheta = \\
&\quad = \frac{V^2}{T}\int_{\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\alpha-\frac{T}{2}}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha-\tau-\frac{T}{2}}{T}\right) d\alpha
\end{aligned}
$$

Segnale binario casuale (4/5)

Nei passaggi precedenti è stata usata la sostituzione $\alpha = t_1 - \vartheta - nT$.

L'autocorrelazione

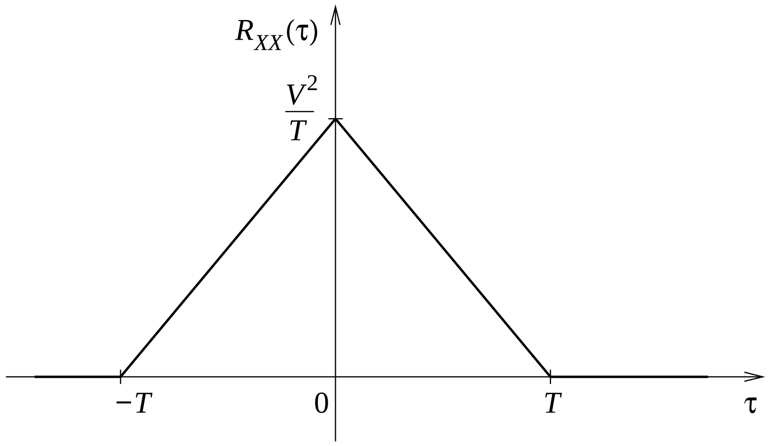
$$R_{XX}(\tau) = \frac{V^2}{T}\int_{\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\alpha-\frac{T}{2}}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha-\tau-\frac{T}{2}}{T}\right) d\alpha$$

dipende solo da $\tau = t_1 - t_2$, quindi il processo stocastico $X(t)$ è **stazionario in senso lato**.

Segnale binario casuale (5/5)

$$R_{XX}(\tau) = \frac{V^2}{T}\int_{\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\alpha - \frac{T}{2}}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha - \tau - \frac{T}{2}}{T}\right) d\alpha =$$

$$= \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{2T}\right)$$



Proprietà dell'autocorrelazione

L'autocorrelazione $R_{XX}(\tau)$ di un p.s. stazionario reale $X(t)$ ha le stesse proprietà dell'autocorrelazione di un segnale deterministico reale:

- $R_{XX}(\tau)$ è reale e pari
- $R_{XX}(0) = E\left((X(t))^2\right) = P_X$ (potenza media)
- $R_{XX}(0) \geq R_{XX}(\tau)$ per $\forall\tau$
- se $R_{XX}(\tau)$ non è periodica, $R_{XX}(\infty) = m_X^2$

Media della somma

Consideriamo due processi stocastici stazionari $X(t)$ e $Y(t)$, aventi media m_X e m_Y. La loro somma è il processo stocastico stazionario $Z(t) = X(t) + Y(t)$, che ha valor medio:

$$\begin{aligned} m_Z = & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(X+Y)f(x,y)dxdy = \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Xf(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Yf(x,y)dxdy = \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty}Xf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}Yf_Y(y)dy = \\ = & \, m_X + m_Y \end{aligned}$$

La media della somma è uguale alla somma delle medie.

Varianza della somma (1/3)

Per calcolare la varianza, calcoliamo il momento del secondo ordine del p.s. stazionario $Z(t) = X(t) + Y(t)$:

$$\begin{aligned} E(Z^2) = & E\big((X+Y)^2\big) = \iint_{-\infty}^{\infty}(X+Y)^2 f(x,y)dxdy = \\ = & \iint_{-\infty}^{\infty}X^2 f(x,y)dxdy + \iint_{-\infty}^{\infty}Y^2 f(x,y)dxdy + \\ & +2\iint_{-\infty}^{\infty}XYf(x,y)dxdy = \\ = & \int_{-\infty}^{\infty}X^2 f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty}Y^2 f_Y(y)dy + 2\iint_{-\infty}^{\infty}XYf(x,y)dxdy = \\ = & E(X^2) + E(Y^2) + 2\iint_{-\infty}^{\infty}XYf(x,y)dxdy \end{aligned}$$

Varianza della somma (2/3)

Se i p.s. $X(t)$ e $Y(t)$ sono **indipendenti**, allora

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

e si può calcolare anche l'ultimo integrale, ottenendo:

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= E(X^2) + E(Y^2) + 2 \iint_{-\infty}^{\infty} XYf(x,y)dxdy = \\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2 \iint_{-\infty}^{\infty} XYf_X(x)f_Y(y)dxdy = \\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} Xf_X(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} Yf_Y(y)dy = \\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

Varianza della somma (3/3)

Se i p.s. $X(t)$ e $Y(t)$, oltre ad essere **indipendenti**, sono anche **a media nulla** (o almeno **uno** dei due è a media nulla), allora anche il momento del secondo ordine di Z è la somma dei momenti del secondo ordine di X e Y:

$$E(Z^2) = E(X^2) + E(Y^2)$$

e la varianza della somma è la somma delle varianze:

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

Somma di rumore bianco

In un sistema che comprende più sorgenti **indipendenti** di rumore bianco $W_1, W_2, \ldots, W_k$ che vengono sommate fra di loro, il processo stocastico risultante $W(t) = \sum_{i=1}^{k} W_i(t)$ è ancora un rumore bianco a media nulla (perché tutti i W_i sono a media nulla), e con varianza:

$$\sigma_W^2 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_{W_i}^2$$

Il valore rms del p.s. $W(t)$ è:

$$W_{\text{rms}} = \sigma_W = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sigma_{W_i}^2}$$

Esempio: medie temporali (1/3)

Si deve effettuare la misura di una grandezza (ad esempio, una tensione costante V) a cui è sovrapposto un rumore bianco additivo $W(t)$.
La misura può essere effettuata prendendo un solo campione del processo stocastico $V + W(t)$:

- il valor medio è la costante V (perché $W(t)$ ha media nulla);
- la varianza è σ_W^2 (perché V ha varianza nulla).

Esempio: medie temporali (2/3)

Il **rapporto segnale-rumore** o **SNR** (= *Signal-to-Noise Ratio*) è definito come il rapporto tra la potenza normalizzata del segnale e la varianza del rumore:

$$SNR = \frac{V^2}{\sigma_W^2}$$

Solitamente, il rapporto segnale-rumore è espresso in un'unità di misura logaritmica, chiamata **decibel**:

$$SNR_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10} \frac{V^2}{\sigma_W^2} = 10 \log_{10} \left(\frac{V}{\sigma_W} \right)^2 = 20 \log_{10} \frac{V}{\sigma_W}$$

Esempio: medie temporali (3/3)

Facendo la somma di N campioni presi in istanti diversi $(t_1, t_2, \ldots, t_N)$, si ottiene la variabile aleatoria

$$X = \sum_{i=1}^{N} (V + W(t_i)) = NV + \sum_{i=1}^{N} W(t_i)$$

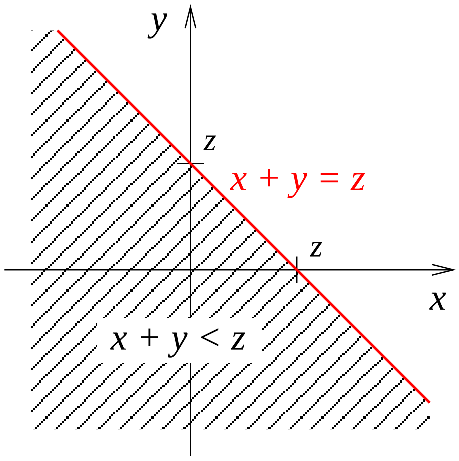
- il valor medio è NV;
- la varianza è $N\sigma_W^2$;
- il rapporto segnale-rumore è $\frac{NV}{\sqrt{N} \cdot \sigma_W} = \sqrt{N} \cdot \frac{V}{\sigma_W}$.

Prendendo N campioni (indipendenti) della grandezza da misurare, il rapporto segnale-rumore migliora di $\sqrt{N}$
(cioè si aggiungono 3 dB ad ogni raddoppio del numero di campioni).

Densità di probabilità della somma (1/6)

La densità di probabilità del p.s. $Z(t) = X(t) + Y(t)$ si calcola a partire dalla funzione cumulativa di distribuzione:

$$F_Z(z) = \Pr\{Z \le z\} = \Pr\{X + Y \le z\} = \Pr\{X \le \infty, Y \le z - X\}$$



Densità di probabilità della somma (2/6)

$$F_Z(z) = \Pr\{X \le \infty, Y < z - X\} = \iint_{[x+y\le z]} f_X(x) f_Y(y) dx dy =$$
$$= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y) dy dx =$$
$$= \int_{y=-\infty}^{z-x} \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

Derivando la F_Z rispetto a z, di ottiene la pdf f_Z:

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx = f_X(z) * f_Y(z).$$

La densità di probabilità della somma di due processi stocastici indipendenti è uguale alla convoluzione delle densità di probabilità dei due addendi.

Densità di probabilità della somma (3/6)

Nel caso in cui entrambi gli addendi abbiano densità di probabilità gaussiana:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_X} e^{-\left(x^2/2\sigma_X^2\right)} \; ; \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_Y} e^{-\left(y^2/2\sigma_Y^2\right)}$$

allora la densità di probabilità della somma $Z = X + Y$ è:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2/2\sigma_X^2\right)} e^{-\left((z-x)^2/2\sigma_Y^2\right)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2\left(1/\sigma_X^2+1/\sigma_Y^2\right)-2xz/\sigma_Y^2+z^2/\sigma_Y^2\right)} dx \end{aligned}$$

Densità di probabilità della somma (4/6)

Per calcolare agevolmente l'integrale, occorre fare in modo che la funzione integranda abbia la forma:

$$e^{-\frac{1}{2}\left(u^2+cz^2\right)}$$

Uguagliando gli esponenti e svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$u = x\sqrt{\frac{1}{\sigma_X^2}+\frac{1}{\sigma_Y^2}} - \frac{z}{\sigma_Y^2\sqrt{\frac{1}{\sigma_X^2}+\frac{1}{\sigma_Y^2}}}$$

$$c = \frac{1}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}$$

Densità di probabilità della somma (5/6)

Sostituendo la variabile u nella funzione integranda, si ha:

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du \cdot e^{-z^2/2\left(\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)}$$

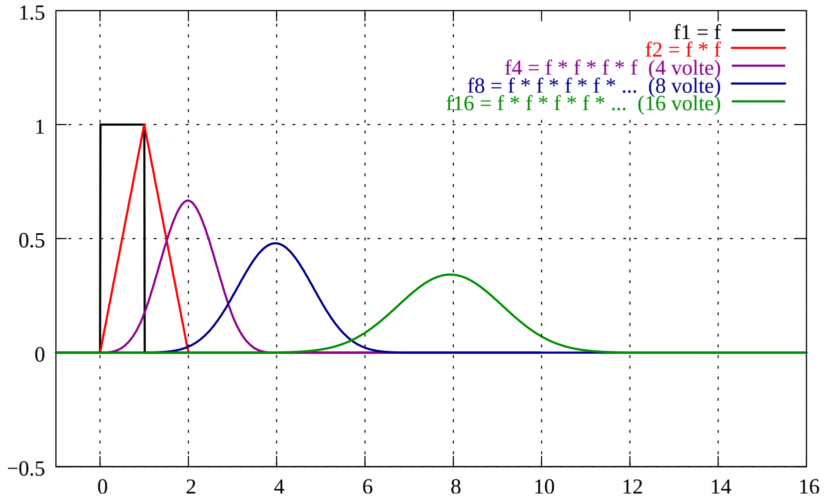
L'ultimo termine esponenziale dipende solo da z e quindi è stato portato fuori dal segno di integrale. Inoltre, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$. Quindi risulta:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)}} e^{-z^2/2\left(\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-z^2/2\sigma^2}$$

che è una pdf gaussiana con varianza $\sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Densità di probabilità della somma (6/6)

Se gli addendi non hanno pdf gaussiana, la pdf della somma tende comunque ad una gaussiana all'aumentare del numero di addendi. Esempio con pdf uniforme in [0, 1]:



Funzione caratteristica (1/2)

La pdf della somma di due p.s. aventi pdf gaussiana si può ricavare anche in un altro modo, definendo la funzione caratteristica $\Phi_X(\omega)$:

$$\Phi_X(\omega) = E\left(e^{j\omega X}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx$$

In pratica, la funzione caratteristica è la trasformata di Fourier della densità di probabilità (con il segno +, invece che –, nell'esponenziale).

Funzione caratteristica (2/2)

Per le proprietà delle trasformate di Fourier, alla convoluzione delle pdf corrisponde il prodotto delle funzioni caratteristiche:

$$\Phi_Z(\omega) = \Phi_X(\omega) \cdot \Phi_Y(\omega)$$

Poiché la trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana, $\Phi_X(\omega)$ e $\Phi_Y(\omega)$ sono gaussiane, e quindi anche il loro prodotto è una gaussiana.
Di conseguenza, è una gaussiana anche $f_Z(z)$, che è l'antitrasformata (con il segno –, invece che +, nell'esponenziale) di $\Phi_Z(\omega)$.