Teoria dei Segnali
Processo di Poisson e rumore granulare

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Teoria dei Segnali – Processo di Poisson e rumore granulare – 17 gennaio 2011

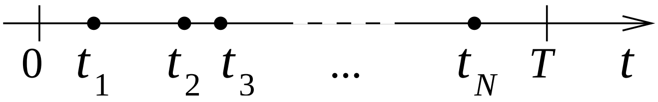
Contenuto

1. Punti di Poisson
2. Impulsi di Poisson
3. Processo di Poisson
4. Processo di Poisson generalizzato
5. Rumore granulare

Punti di Poisson (1/3)

Consideriamo l'intervallo temporale $[0, T]$ e scegliamo a caso N istanti di tempo t_i (con $i = 1, , \ldots, N$): questi sono istanti casuali di Poisson. La densità degli istanti di Poisson (cioè il numero medio di istanti nell'unità di tempo) è:

$$\lambda = \frac{N}{T}$$



Punti di Poisson (2/3)

L'intervallo temporale può essere infinito (cioè l'intero asse dei tempi); in questo caso il numero di punti di Poisson è infinito, e la densità degli istanti di Poisson viene definita come:

$$\lambda = \lim_{T \to \infty} \frac{N_T}{T},$$

dove N_T è il numero di istanti casuali contenuti in un intervallo temporale di durata T, come ad esempio $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Punti di Poisson (3/3)

La probabilità di avere esattamente k punti in un intervallo temporale di durata t è:

$$\Pr\{k \text{ punti} \in (0,t)\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

Il numero medio di punti in un intervallo di durata t è:

$$E\{\text{punti} \in (0,t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t$$

e il momento del secondo ordine è:

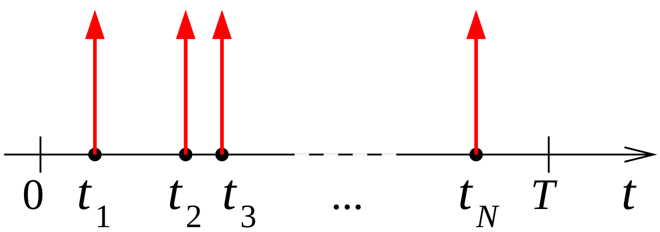
$$E\{(\text{punti} \in (0,t))^2\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = \lambda^2 t^2 + \lambda t$$

Impulsi di Poisson (1/2)

Consideriamo un insieme di punti di Poisson $\{t_i\}$ (finito o infinito), con densità λ, e associamo ad ogni istante t_i la delta di Dirac $\delta(t - t_i)$.
Definiamo il processo stocastico:

$$Z(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$$

$Z(t)$ è una serie di impulsi di Poisson.



Impulsi di Poisson (2/2)

Se gli istanti di Poisson sono distribuiti **uniformemente** nel tempo, la serie di impulsi di Poisson $Z(t)$ è un **processo stocastico stazionario** avente valor medio

$$E(Z) = \frac{1}{T}\int_T Z(t)dt = \frac{N_T}{T} = \lambda$$

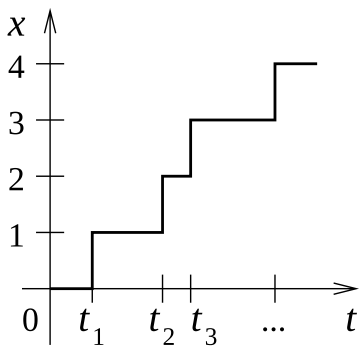
(se l'intervallo temporale è infinito, il valor medio va considerato come limite per $T \to \infty$).

Se gli istanti di Poisson **non** sono distribuiti uniformemente nel tempo, il processo stocastico $Z(t)$ **non è stazionario**.

Processo di Poisson (1/4)

Si definisce processo di Poisson $X(t)$ la funzione che esprime il numero di punti di Poisson contenuti in $(0, t)$.

$$X(t) = \int_0^t Z(t)dt$$



Processo di Poisson (2/4)

Le funzioni del processo di Poisson sono a scala, con gradini di ampiezza unitaria posizionati negli istanti di Poisson t_i.

Dati due istanti t_a e t_b (con $t_a > t_b$), la variabile aleatoria $X(t_a) - X(t_b)$, cioè il numero di istanti di Poisson in (t_b, t_a), ha una distribuzione di Poisson:

$$\Pr\{X(t_a) - X(t_b) = k\} = \frac{e^{-\lambda(t_a - t_b)} \left(\lambda(t_a - t_b)\right)^k}{k!}$$

$$E\left(X(t_a) - X(t_b)\right) = \lambda(t_a - t_b)$$

$$E\left(\left(X(t_a) - X(t_b)\right)^2\right) = \lambda^2 (t_a - t_b)^2 + \lambda(t_a - t_b)$$

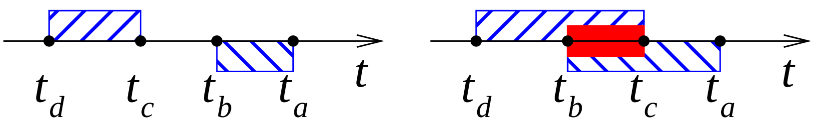
Processo di Poisson (3/4)

Dati quattro istanti temporali t_a, t_b, t_c e t_d (con $t_a > t_b$ e $t_c > t_d$), il momento misto delle due variabili aleatorie $X(t_a) - X(t_b)$ e $X(t_c) - X(t_d)$ è:

$$E\left(\left(X(t_a) - X(t_b)\right)\left(X(t_c) - X(t_d)\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} \lambda^2 (t_a - t_b)(t_c - t_d) & \text{se } t_a > t_b > t_c > t_d \\ \lambda^2 (t_a - t_b)(t_c - t_d) + \lambda(t_c - t_b) & \text{se } t_a > t_c > t_b > t_d \end{cases}$$

Il termine in rosso si ha quando i due intervalli di tempo (t_b, t_a) e (t_d, t_c) sono sovrapposti (come nella figura a destra).



Processo di Poisson (4/4)

- Valor medio del processo di Poisson $X(t)$:

$$E(X(t)) = \lambda t$$

- Autocorrelazione di $X(t)$:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\left(X(t_1)X(t_2)\right) = \begin{cases} \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1 & \text{se } t_1 \leq t_2 \\ \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_2 & \text{se } t_1 \geq t_2 \end{cases}$$

Questi risultati si ottengono dai momenti di $X(t_a) - X(t_b)$ e $X(t_c) - X(t_d)$, ponendo $t_b = t_d = 0$.

Distribuzione non uniforme

Se la densità dei punti di Poisson non è uniforme, ma varia nel tempo ed è espressa dalla funzione $\lambda(t)$, i risultati precedenti rimangono validi, sostituendo $\lambda(t_2 - t_1)$ con:

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$$

- Valor medio:

$$E(X(t)) = \int_0^t \lambda(t) dt$$

- Autocorrelazione:

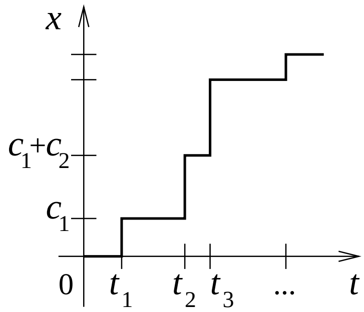
$$R_{XX}(t_1, t_2) = \begin{cases} \int_0^{t_1} \lambda(t)dt \left(1 + \int_0^{t_2} \lambda(t)dt\right) & \text{se } t_1 \leq t_2 \\ \int_0^{t_2} \lambda(t)dt \left(1 + \int_0^{t_1} \lambda(t)dt\right) & \text{se } t_1 \geq t_2 \end{cases}$$

Processo di Poisson generalizzato

Quando l'ampiezza dei gradini del processo di Poisson non è costante, ma è variabile in modo casuale, si ha il processo di Poisson generalizzato:

$$X(t) = \int_0^t \sum_i c_i \delta(t - t_i) dt$$

dove i c_i sono i valori assunti da una variabile aleatoria C.



Incrementi di Poisson (1/2)

Per ricavare l'autocorrelazione del processo $Z(t)$ (che è la derivata di $X(t)$), è utile definire un altro processo $Y(t)$ come il *rapporto incrementale* di $X(t)$):

$$Y(t) = \frac{X(t+\epsilon) - X(t)}{\epsilon}$$

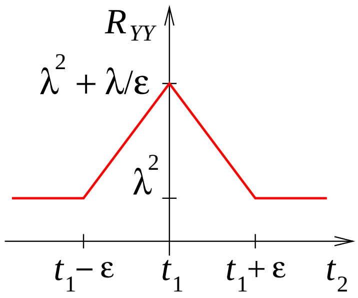
- Valor medio degli incrementi di Poisson:

$$E(Y(t)) = \frac{1}{\epsilon} E(X(t+\epsilon)) - \frac{1}{\epsilon} E(X(t)) = \frac{1}{\epsilon} (\lambda(t+\epsilon) - \lambda t) = \lambda$$

Incrementi di Poisson (2/2)

- Autocorrelazione degli incrementi di Poisson: $R_{YY}(t_1, t_2)$ si ricava osservando che il momento $E(\epsilon^2 Y(t_1)Y(t_2))$ è analogo a $E((X(t_a) - X(t_b))(X(t_c) - X(t_d)))$ calcolato in precedenza.

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda^2 & \text{se } |t_1 - t_2| > \epsilon \\ \lambda^2 + \frac{\lambda(\epsilon - |t_1 - t_2|)}{\epsilon^2} & \text{se } |t_1 - t_2| < \epsilon \end{cases}$$



Autocorrelazione degli impulsi di Poisson

L'autocorrelazione del processo $Z(t)$ è il limite dell'autocorrelazione del rapporto incrementale $Y(t)$, quando ϵ tende a zero:

$$R_{ZZ}(t_1, t_2) = \lim_{\epsilon \to 0} R_{YY}(t_1, t_2) = \lambda^2 + \lambda\delta(t_1 - t_2)$$

Poiché $Z(t)$ è stazionario, si può scrivere:

$$R_{ZZ}(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau)$$

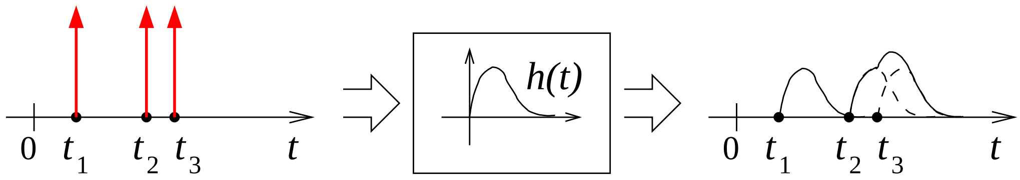
- Densità spettrale di potenza degli impulsi di Poisson:

$$S_{ZZ}(f) = \lambda^2\delta(f) + \lambda$$

Rumore granulare (1/4)

Filtrando la serie di impulsi di Poisson $Z(t)$ attraverso un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)$, si ottiene il processo stocastico noto come rumore granulare (o *"shot noise"*):

$$N(t) = Z(t) * h(t) = \sum_i \delta(t - t_i) * h(t) = \sum_i h(t - t_i)$$



Rumore granulare (2/4)

Il rumore granulare si chiama così perché è dovuto alla granularità (cioè alla quantizzazione) delle cariche elettiche in movimento.
Il rumore granulare si nota particolarmente nei dispositivi elettronici percorsi da correnti dirette di piccola intensità.

Ad esempio, in un transistore bipolare, per bassi valori di corrente, la corrente di base varia in modo non trascurabile per effetto della fluttuazione istantanea del numero di portatori che attraversano la giunzione: questo effetto viene modellizzato come rumore granulare.

Rumore granulare (3/4)

- Valor medio:

$$E(N) = E(Z) \cdot H(0) = \lambda \cdot H(0)$$

  dove $H(0)$ è la risposta in frequenza del sistema, calcolata per $f = 0$.
- Autocorrelazione:

$$R_{NN}(\tau) = R_{ZZ}(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau) = \left(\lambda^2 + \lambda\delta(\tau)\right) * h^*(-\tau) * h(\tau)$$

- Densità spettrale di potenza:

$$S_{NN}(f) = S_{ZZ}(f) \cdot \left|H(f)\right|^2 = \left(\lambda^2\delta(f) + \lambda\right) \cdot \left|H(f)\right|^2$$

Rumore granulare (4/4)

In una giunzione p-n polarizzata direttamente la densità spettrale di potenza della corrente di rumore granulare è:

$$S_{NN}(f) = q\bar{I} + \bar{I}^2\delta(f)$$

dove q è la carica dell'elettrone e $\bar{I}$ è il valore medio della corrente.
Tranne che per la componente continua $\delta(f)$, la densità spettrale di potenza è bianca (ma solo fino ad una frequenza pari all'inverso del tempo di attraversamento della giunzione p-n).
Solitamente, trascurando la parte in continua, la densità spettrale di potenza della corrente di rumore granulare si approssima con:

$$S_{NN}(f) = q\bar{I}$$