Teoria dei Segnali
Rumore granulare

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

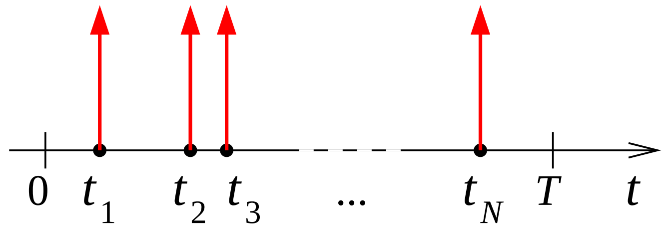
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Teoria dei Segnali – Rumore granulare – 24 gennaio 2011

Contenuto

Impulsi di Poisson (1/2)

$$Z(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$$



Se gli istanti di Poisson $\{t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots\}$ sono distribuiti **uniformemente** nel tempo, con densità temporale λ, la serie di impulsi di Poisson $Z(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$ è un processo stocastico stazionario.

Impulsi di Poisson (2/2)

- Valor medio:

$$E(Z) = \lambda$$

- Autocorrelazione:

$$R_{ZZ}(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau)$$

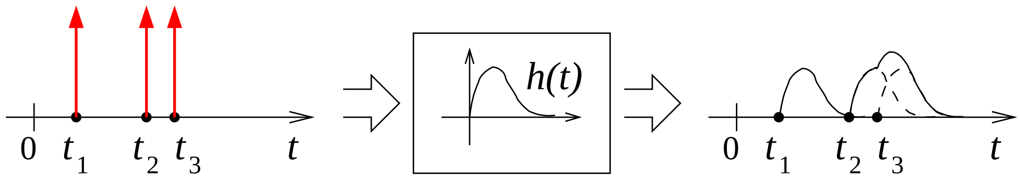
- Densità spettrale di potenza:

$$S_{ZZ}(f) = \lambda^2\delta(f) + \lambda$$

Rumore granulare (1/5)

Filtrando la serie di impulsi di Poisson $Z(t)$ attraverso un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)$, si ottiene il processo stocastico noto come rumore granulare (o *"shot noise"*):

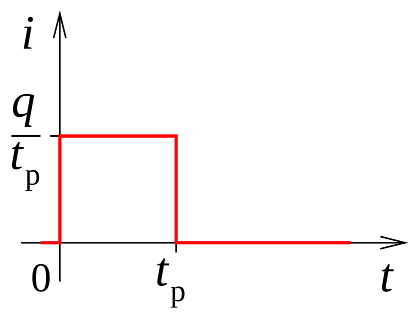
$$N(t) = Z(t) * h(t) = \sum_i \delta(t - t_i) * h(t) = \sum_i h(t - t_i)$$



Rumore granulare (2/5)

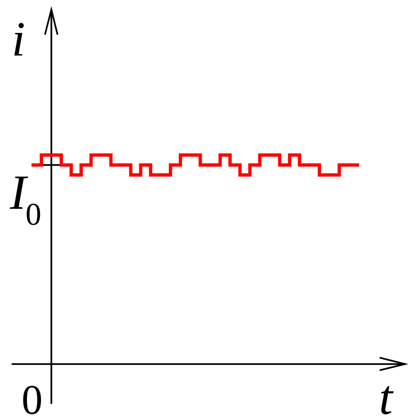
Il rumore granulare si chiama così perché è dovuto alla granularità (cioè alla quantizzazione) delle cariche elettiche in movimento.

Esempio: corrente in un diodo a giunzione p-n
Un elettrone ha una carica elettrica $-q$ e impiega un tempo t_p ad attraversare la giunzione. La corrente dovuta al movimento del singolo elettrone ha un profilo rettangolare:



Rumore granulare (3/5)

Quando un gran numero di elettroni si muovono, gli istanti in cui cominciano ad attraversare la giunzione sono distribuiti casualmente nel tempo (punti di Poisson). La corrente totale è il risultato della convoluzione tra l'impulso rettangolare del singolo elettrone e gli impulsi di Poisson:



Rumore granulare (4/5)

- Se $\lambda t_\mathrm{p} \ll 1$, allora è molto probabile che il nuovo impulso arrivi quando i transitori degli impulsi precedenti si sono già esauriti. In questo caso, abbiamo il rumore granulare **a bassa densità**.
- Se $\lambda t_\mathrm{p} \gg 1$, allora il nuovo impulso si aggiunge ai transitori degli impulsi precedenti che non si sono ancora esauriti. In questo caso, abbiamo il rumore granulare **ad alta densità**.
  Per il teorema del limite centrale, la funzione densità di probabilità di un rumore granulare ad alta densità tende ad una gaussiana.

Rumore granulare (5/5)

Il rumore granulare si nota particolarmente nei dispositivi elettronici percorsi da correnti dirette di piccola intensità.

Ad esempio, in un transistore bipolare, per bassi valori di corrente, la corrente di base (che è molto minore delle correnti di emettitore e di collettore) varia in modo non trascurabile per effetto della fluttuazione istantanea del numero di portatori che attraversano la giunzione: questo effetto viene modellizzato come rumore granulare ad alta densità.

Momenti del rumore granulare (1/6)

- Valor medio:
$$E(N) = E(Z) \cdot H(0) = \lambda \cdot H(0)$$
dove $H(0)$ è la risposta in frequenza (trasformata di Fourier di $h(t)$), calcolata per $f = 0$.

Momenti del rumore granulare (2/6)

- Autocorrelazione:

$$R_{NN}(\tau) = R_{ZZ}(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau) = \left(\lambda^2 + \lambda\delta(\tau)\right) * h^*(-\tau) * h(\tau)$$

Poiché $h(t)$ è reale, $h^*(-\tau) = h(-\tau)$, e:

$$h(-\tau) * h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau+\beta)h(\beta)d\beta$$

Inoltre, la convoluzione della costante (λ^2) con una funzione del tempo dà come risultato il prodotto della costante per la trasformata di Fourier della funzione, calcolata per $f = 0$:

$$\lambda^2 * h(-\tau) * h(\tau) = \lambda^2 \cdot H^2(0)$$

Momenti del rumore granulare (3/6)

- Autocorrelazione (continuazione):
Combinando i risultati precedenti, si ricava:

$$R_{NN}(\tau) = \lambda^2 H^2(0) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau+\beta)h(\beta)d\beta$$

Momenti del rumore granulare (4/6)

- Autocovarianza:
  Dalla relazione $C_{NN}(\tau) = R_{NN}(\tau) - (E(N))^2$, si ottiene:

$$C_{NN}(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau+\beta)h(\beta)d\beta$$

  Inoltre, poiché la varianza è l'autocovarianza calcolata per $\tau = 0$, abbiamo:

$$\sigma_N^2 = C_{NN}(0) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)dt$$

Momenti del rumore granulare (5/6)

- Densità spettrale di potenza:

$$S_{NN}(f) = S_{ZZ}(f) \cdot \left|H(f)\right|^2 = \left(\lambda^2\delta(f) + \lambda\right) \cdot \left|H(f)\right|^2$$

  Siccome la delta di Dirac $\delta(f)$ è nulla per $\forall f \neq 0$, abbiamo che:

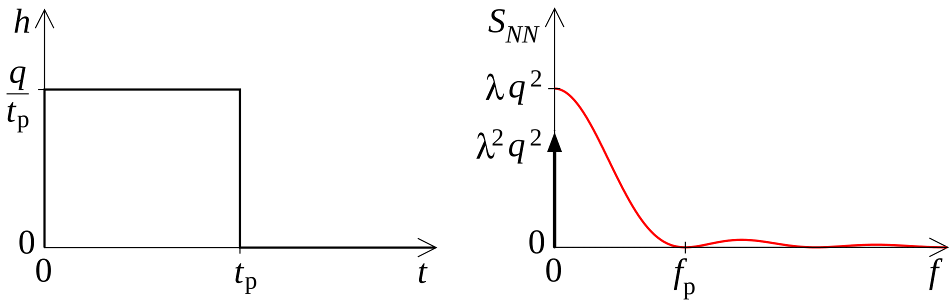
$$\delta(f) \cdot \left|H(f)\right|^2 = \delta(f) \cdot H^2(0)$$

  e quindi risulta:

$$S_{NN}(f) = \lambda^2 H^2(0)\delta(f) + \lambda\left|H(f)\right|^2$$

Momenti del rumore granulare (6/6)

La trasformata di Fourier di un impulso rettangolare di durata t_p è una funzione sinc avente frequenza caratteristica $f_p = 1/t_p$.



Risposta impulsiva — Densità spettrale di potenza

Se $t_p = 10$ ps, allora $f_p = 100$ GHz e il rumore granulare *in prima approssimazione* può essere considerato bianco alle frequenze di normale funzionamento.

Rumore granulare in una giunzione p-n

In una giunzione p-n polarizzata direttamente la densità spettrale di potenza della corrente di rumore granulare è:

$$S_{NN}(f) = q\bar{I} + \bar{I}^2\delta(f)$$

dove q è la carica dell'elettrone e $\bar{I}$ è il valore medio della corrente.
Tranne che per la componente continua $\delta(f)$, la densità spettrale di potenza è bianca (ma solo fino ad una frequenza pari all'inverso del tempo di attraversamento della giunzione p-n).
Solitamente, trascurando la parte in continua, la densità spettrale di potenza della corrente di rumore granulare si approssima con:

$$S_{NN}(f) = q\bar{I}$$

Rumore granulare e rumore termico

Nota:

- *Il rumore termico è sempre presente in qualsiasi dispositivo simmetrico che può condurre corrente (ad esempio: una resistenza), indipendentemente dal fatto che il dispositivo sia percorso o no da corrente.*
- *Il rumore granulare è presente solo nei dispositivi asimmetrici (giunzioni p-n) in conduzione diretta, dove di solito predomina sul rumore termico.*