Teoria dei Segnali
Filtraggio

Valentino Liberali

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Milano
valentino.liberali@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Teoria dei Segnali – Filtraggio – 24 gennaio 2011

Contenuto

Problema del filtraggio (1/2)

Ad un segnale $v(t)$ è sovrapposto un rumore stazionario $N(t)$, e di conseguenza possiamo osservare solo la somma dei due:

$$X(t) = v(t) + N(t)$$

PROBLEMA: conoscendo il processo $X(t)$ per ogni t da $-\infty$ a $+\infty$, come possiamo stimare il segnale $v(t)$?

Si osservi che il rumore $N(t)$, essendo un processo stocastico, non è noto: di conseguenza, il segnale non può essere calcolato semplicemente facendo la differenza $v(t) = X(t) - N(t)$.

Problema del filtraggio (2/2)

Noto $X(t) = v(t) + N(t)$, cerchiamo una stima $\hat{v}(t)$ del segnale $v(t)$, ottenuta attraverso una trasformazione lineare $\mathcal{G}$ applicata ai dati $X(t)$:

$$\hat{v}(t) = \mathcal{G}(X(t))$$

Stimando $v(t)$ con $\hat{v}(t)$, commettiamo l'errore:

$$v(t) - \hat{v}(t)$$

che deve essere minimizzato.

Stima a minimi quadrati (1/4)

La minimizzazione dell'errore:

$$v(t) - \hat{v}(t)$$

non è un'operazione banale quando si considerano i processi stocastici.
In generale, non è possibile limitare l'errore, cioè avere *sempre*:

$$\left| v(t) - \hat{v}(t) \right| \le a$$

con a costante fissata.
Infatti, un rumore termico $N(t)$ ha una densità di ampiezza gaussiana e pertanto può assumere valori maggiori di qualsiasi costante prefissata: questo non permette di limitare l'errore $v(t) - \hat{v}(t)$.

Stima a minimi quadrati (2/4)

Potremmo voler minimizzare la probabilità che l'errore ecceda il limite prefissato a:

$$\Pr\left\{ \left| v(t) - \hat{v}(t) \right| > a \right\}$$

ma in questo modo si incorre in problemi di calcolo.

Il criterio migliore consiste nel **minimizzare l'errore quadratico medio** (*stima nel senso dei minimi quadrati*):

$$e = E\left(\left(v(t) - \hat{v}(t) \right)^2 \right)$$

perché il quadrato dell'errore $\left(v(t) - \hat{v}(t) \right)^2$ è la *potenza istantanea* normalizzata dell'errore.

Stima a minimi quadrati (3/4)

La minimizzazione dell'errore quadratico medio:

$$e = E\left((v(t) - \hat{v}(t))^2\right)$$

è possibile se esiste una trasformazione lineare $\mathcal{G}$ tale che la differenza:

$$v(t) - \mathcal{G}(X(t))$$

è *ortogonale* a $X(t)$, per $\forall t$.
In questo caso, la stima migliore è:

$$\hat{v}(t) = \mathcal{G}(X(t))$$

Ricordiamo che due v.a. X e Y sono ortogonali quando $E(XY^*) = E(X^*Y) = 0$.

Stima a minimi quadrati (4/4)

Se

$$E\left((v(t) - \mathcal{G}(X(t)))\,X(t)\right) = 0 \quad \text{per } \forall t,$$

allora la stima $\hat{v}(t) = \mathcal{G}(X(t))$ è la migliore nel senso dei minimi quadrati, ed è affetta dall'errore minimo:

$$e_{\min} = E\left((v(t) - \mathcal{G}(X(t)))\,v(t)\right)$$

Filtraggio (1/6)

Applichiamo i concetti precedenti a questo problema: noto $X(t)$ in un numero finito di istanti di tempo $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$, stimare $X(t)$ all'istante $t = t_0$.

Poiché cerchiamo un operatore lineare, la soluzione consiste nel trovare la media pesata:

$$a_1 X(t_1) + a_2 X(t_2) + \ldots + a_N X(t_N)$$

in cui i pesi $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sono le incognite, e devono essere tali che l'errore:

$$X(t_0) - (a_1 X(t_1) + a_2 X(t_2) + \ldots + a_N X(t_N))$$

sia ortogonale rispetto ai dati.

Filtraggio (2/6)

L'errore deve essere ortogonale rispetto ai dati, cioè:

$$E\left((X(t_0) - (a_1 X(t_1) + a_2 X(t_2) + \ldots + a_N X(t_N)))^* X(t_i)\right) = 0$$

per $i = 1, 2 \ldots, N$. Svolgendo i calcoli, otteniamo:

$$\begin{aligned} E\left(X(t_0)^* X(t_i)\right) = a_1 E\left(X(t_1)^* X(t_i)\right) + a_2 E\left(X(t_2)^* X(t_i)\right) + \\ + \ldots + a_N E\left(X(t_N)^* X(t_i)\right) \end{aligned}$$

che può essere scritta come:

$$R_{0i} = a_1 R_{1i} + a_2 R_{2i} + \ldots + a_N R_{Ni}$$

Dal sistema delle N equazioni (una per ogni $i = 1, 2 \ldots, N$), si ricavano le N incognite $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

Filtraggio (3/6)

Generalizziamo il problema ad un numero infinito di istanti di tempo: noto $X(t) = v(t) + N(t)$ per $\forall t \in (a,b)$, stimare $v(t)$ in un istante particolare $t = t_0$.

Anche in questo caso, la stima migliore è una combinazione lineare dei valori noti; poichè abbiamo infiniti istanti di tempo nell'intervallo (a,b), la sommatoria deve essere sostituita da un integrale:

$$\hat{v}(t_0) = \int_a^b h(t)X(t)dt$$

dove al posto del peso discreto a_i abbiamo il peso continuo $h(t)dt$.

Filtraggio (4/6)

La condizione di ortogonalità si scrive come:

$$E\left(\left(v(t_0) - \int_a^b h(\alpha)X(\alpha)d\alpha\right)X(t)\right) = 0$$

Poiché

$$R_{vX}(t_0 - t) = E(v(t_0)X(t))$$

$$R_{XX}(\alpha - t) = E(X(\alpha)X(t))$$

il risultato finale è:

$$R_{vX}(t_0 - t) = \int_a^b R_{XX}(\alpha - t)h(\alpha)d\alpha$$

per $\forall t \in (a,b)$.

Filtraggio (5/6)

Nel caso in cui l'intervallo temporale vada da $-\infty$ a $+\infty$, ponendo

$$\tau = t_0 - t$$

si ottiene:

$$R_{vX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

per $\forall \tau$.

Filtraggio (6/6)

La soluzione $h(t)$ dell'equazione integrale si ricava immediatamente nel dominio delle trasformate di Fourier.
Dall'equazione in f:

$$S_{vX}(f) = S_{XX}(f) \cdot H(f)$$

si ottiene la soluzione:

$$H(f) = \frac{S_{vX}(f)}{S_{XX}(f)}$$

che rappresenta il filtro ottimo nel senso dei minimi quadrati.